



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Un estudio de frisos y mosaicos planos a
través de transformaciones rígidas y
signaturas de patrones repetitivos.

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICA

PRESENTA:

Lizbeth Karina Guzmán Pedroza

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Enrique Castañeda Alvarado

Dr. José Antonio Martínez Cortez

El Cerrillo, Piedras Blancas, México
28 de junio de 2023.



“Sé que puedo hacer lo que me proponga y ésto es algo que quiero hacer”

Índice general

INTRODUCCIÓN	5
1. PRELIMINARES	7
1.1. Simetrías	7
1.2. Grupos y transformaciones rígidas	12
2. FRISOS Y MOSAICOS	27
2.1. Frisos	27
2.2. Mosaicos	45
2.2.1. Patrones planos	51
2.2.2. Teselaciones	62
Bibliografía	70

INTRODUCCIÓN

¿Quién no ha sido maravillado por los diseños de losetas para pisos de baños o cocinas? ¿Acaso alguien se ha perdido de las “Felicidades de año nuevo”, una de las grandes obras de M. C. Escher? ¿Alguna persona puede ser indiferente ante la belleza de las múltiples variedades de cenefas? ¿Será muy ambicioso querer contemplar la arquitectura de la catedral de Sevilla? Todas estas preguntas por diferentes que parezcan tienen algo en común, la geometría. Y muchos se preguntarán ¿cómo es eso posible? la respuesta es la siguiente: todas involucran un patrón que gracias a desplazamientos, giros, entre otros, va dando lugar a un todo verdaderamente impresionante.

Es por ello que en el presente proyecto se busca estudiar de manera matemática a estos desplazamientos, giros, entre otros. Asimismo, la forma en la que juntos van formando el todo, es decir, estudiamos las llamadas transformaciones rígidas como lo son: las traslaciones (desplazamientos), rotaciones (giros), reflexiones y con ello, la composición. Observamos el comportamiento que tiene individualmente y el que tiene al ser compuesta con cualquier otra de ellas. Por un lado, daremos paso a la construcción de los frisos (el todo), en donde estudiamos cuáles y cuántos son los diferentes tipos de frisos. Por otro lado, sirve para estudiar a los mosaicos planos (el todo) por medio de las llamadas firmas de patrones repetitivos. A medida que avanzamos con el desarrollo de los mosaicos planos estudiamos cuáles y cuántos son los diferentes tipos.

Todo esto se redactó en dos capítulos, el primero llamado “Preliminares” donde se abarcan conceptos básicos, así como un poco de teoría desarrollada a base de estos y el segundo llamado “Frisos y Mosaicos”, que como su nombre lo indica va más enfocado a la construcción de estos.

Es importante recalcar la importancia de conocer acerca de este tema y esta es que desde tiempos pasados los frisos y los mosaicos se encuentran inmersos en nuestra vida cotidiana, desde el bordado en un bolso hasta el diseño en la arquitectura de construcciones inmensas. Sin embargo, no somos concientes en su totalidad de ello. Haciendo que nosotros contrarrestemos el mérito necesario de las personas que emplean todos estos conocimientos.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Es mágico como de algo base surgen cosas inmensas, es decir, de algo como una definición vamos desarrollando observaciones, teoremas, corolarios, entre otros. Sin imaginar que no sólo queda ahí, sino que hay un espacio para poder aplicarlo y el tema de “frisos y mosaicos” no es la excepción. Por lo que en ésta primera parte vamos a iniciar de ésta manera... con la base de este trabajo.

1.1. Simetrías

El estudio de las simetrías es parte fundamental en éste capítulo, debido a que de la definición de simetría se desarrolla el tema a tratar, por lo que todo gira en torno a la definición. Así que en ésta sección mencionaremos definiciones relacionadas y las utilizamos para desglosar un poco de teoría. Cabe señalar que las definiciones involucradas en ésta primera sección han sido consultadas en [2, 1.1. Simetrías, pág. 6].

Definición 1.1.1. La *distancia de un punto P a otro punto Q* es la longitud del segmento de recta entre P y Q . Véase figura 1.1.

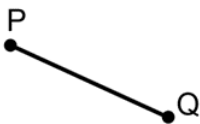


Figura 1.1: Distancia entre los puntos P y Q .

Definición 1.1.2. La *distancia de un punto P a una recta \mathcal{L}* es la longitud del segmento perpendicular de P a \mathcal{L} . Véase figura 1.2.

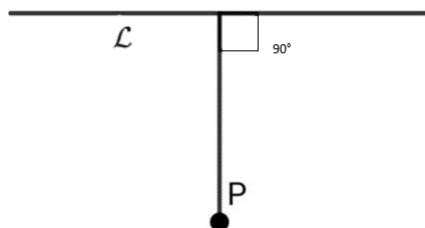


Figura 1.2: Distancia de un punto P a una recta \mathcal{L} .

Definición 1.1.3. La *distancia de un punto P a un plano \mathcal{T}* es la longitud del segmento perpendicular de P a \mathcal{T} . Véase figura 1.3.

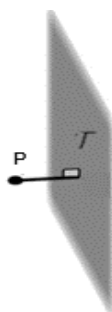


Figura 1.3: Distancia de un punto P a un plano \mathcal{T} .

Definición 1.1.4. Un objeto \mathcal{F} es *simétrico respecto a un punto O* si para cada punto $P \in \mathcal{F}$, el punto P' también pertenece a \mathcal{F} , donde O es el punto medio del segmento PP' . Véase figura 1.4. Se dice que \mathcal{F} tiene *simetría central* y que el punto O es un *centro de simetría de \mathcal{F}* .

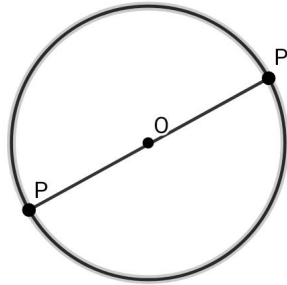


Figura 1.4: Un objeto \mathcal{F} simétrico respecto a un punto O .

Ejemplo 1.1.5. Una recta tiene simetría central respecto a cualquier punto en ella, pero no respecto a un punto fuera de ella.

Ejemplo 1.1.6. Una circunferencia es simétrica respecto a su centro. Véase figura 1.4.

Definición 1.1.7. Un objeto \mathcal{F} es **simétrico respecto a una recta \mathcal{L}** si para cada punto $P \in \mathcal{F}$, el punto P' también pertenece a \mathcal{F} , donde \mathcal{L} corta perpendicularmente al segmento PP' en su punto medio. Véase figura 1.5. En este caso, diremos que \mathcal{F} **tiene simetría axial** y que la recta \mathcal{L} es un **eje de simetría de \mathcal{F}** .

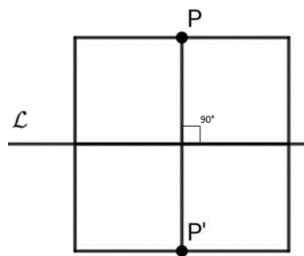


Figura 1.5: Un objeto \mathcal{F} simétrico respecto a una recta \mathcal{L} .

Ejemplo 1.1.8. Un plano $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^3$ tiene simetría axial respecto a cualquier recta en el plano o perpendicular a él; pero no respecto a las demás, por ejemplo, una recta $\mathcal{H} \not\subset \mathcal{M}$ paralela a una recta \mathcal{I} contenida en el plano.

Ejemplo 1.1.9. Una circunferencia es simétrica respecto a cualquier recta que contenga uno de sus diámetros.

Definición 1.1.10. Un objeto \mathcal{F} es **simétrico respecto a un plano** \mathcal{T} si para cada punto P en \mathcal{F} , el punto P' también pertenece a \mathcal{F} , donde \mathcal{T} es el plano perpendicular al segmento PP' por el punto medio. Véase figura 1.6. Se dice que \mathcal{T} es un **plano de simetría de \mathcal{F}** .

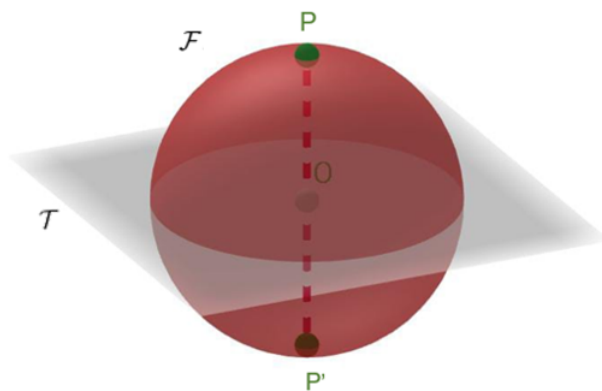


Figura 1.6: Un objeto \mathcal{F} simétrico respecto a un plano \mathcal{T} .

Ejemplo 1.1.11. Una esfera es simétrica respecto a cualquier plano que contenga a su centro.

Ejemplo 1.1.12. El cuerpo humano tiene un plano de simetría, pero no un centro ni un eje de simetría.

Las simetrías de las figuras u objetos permiten reducir el estudio a sólo una parte de la figura u objeto. Por lo que es conveniente conocer las simetrías que posee una figura u objeto.

A continuación, describimos los puntos simétricos de un punto dado en el espacio cartesiano respecto al origen O , los ejes y planos coordenados:

Proposición 1.1.13. Sea $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Entonces

1. $P_O(-x, -y, -z)$ es simétrico de P respecto al origen O ;
2. $P_X(x, -y, -z)$ es simétrico de P respecto al eje X ;
3. $P_Y(-x, y, -z)$ es simétrico de P respecto al eje Y ;

4. $P_Z(-x, -y, z)$ es simétrico de P respecto al eje Z ;
5. $P_{XY}(x, y, -z)$ es simétrico de P respecto al plano XY ;
6. $P_{YZ}(-x, y, z)$ es simétrico de P respecto al plano YZ ;
7. $P_{XZ}(x, -y, z)$ es simétrico de P respecto al plano XZ .

Demostración. Sea $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- Para 1.

Consideremos a $P_O(-x, -y, -z) \in \mathbb{R}^3$ y a la recta \mathcal{L} cuya ecuación esta dada por $V = P + \lambda(2x, 2y, 2z)$, notemos que

$$\begin{aligned} P + \lambda(2x, 2y, 2z) &= (x, y, z) + \lambda(2x, 2y, 2z) \\ &= (1 + 2\lambda)(x, y, z). \end{aligned}$$

Ahora, si $\lambda = -\frac{1}{2}$, entonces $(0, 0, 0) \in \mathcal{L}$ y con ello tenemos que P, O y P_O son colineales.

Además,

$$\begin{aligned} \|PO\| &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \\ &= \sqrt{(0-(-x))^2 + (0-(-y))^2 + (0-(-z))^2} \\ &= \|OP_O\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, P_O es simétrico de P respecto a O .

- Para 2.

Tomamos a $P_X(x, -y, -z) \in \mathbb{R}^3$, así $(P - P_X)$ producto punto con $(1, 0, 0)$ nos da 0, es decir, $(0, 2y, 2z) \cdot (1, 0, 0) = 0$, por lo que $(P - P_X)$ es perpendicular a $(1, 0, 0)$, además el punto medio del segmento PP_X es el punto $(x, 0, 0) \in X$. Por lo que 2. queda demostrado.

De manera análoga se demuestran 3. y 4.

- Para 5.

Consideremos el punto $P_{XY}(x, y, -z) \in \mathbb{R}^3$, dado que $(P - P_{XY}) = (0, 0, 2z)$ es paralelo al eje Z , el segmento PP_{XY} es perpendicular al plano XY y el punto medio del segmento PP_{XY} es $(x, y, 0)$ el cuál esta en el plano XY . Por lo tanto, P_{XY} es el punto simétrico de P con respecto al plano XY .

Análogamente, se prueban 6. y 7.

□

Proposición 1.1.14. *Si una figura $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ es simétrica respecto a los tres planos coordenados, también lo es respecto a los ejes coordenados y al origen.*

Demostración. Sea \mathcal{F} una figura en \mathbb{R}^3 y $P(x, y, z) \in \mathcal{F}$. Como \mathcal{F} es simétrica respecto al plano XY y YZ , por la proposición 1.1.13, tenemos que $P'(-x, y, -z) \in \mathcal{F}$, es decir, $P' = P_Y$. Con lo que \mathcal{F} es simétrico respecto al eje Y . De que \mathcal{F} es simétrico respecto al plano YZ y XZ , por la proposición 1.1.13, tenemos que $P''(-x, -y, z) \in \mathcal{F}$, es decir, $P'' = P_Z$. Por lo cual \mathcal{F} es simétrico respecto al eje Z . De manera similar se tiene que \mathcal{F} es simétrico respecto al eje X . □

1.2. Grupos y transformaciones rígidas

En ésta sección nos adentraremos en las transformaciones rígidas o también llamadas simetrías, algunas propiedades, ejemplos de ellas, la forma de expresarlas por medio de matrices y de manera superficial la relación que tienen con la teoría de grupos.

Es relevante tomar en cuenta, que para una mejor comprensión de esta sección es ideal consultar [3, 3.1. Definición y ejemplos de grupos, pág. 66].

Definición 1.2.1. *Un **grupo** es un conjunto G , no vacío, en el que está definida una operación binaria, es decir, una función $*$: $G \times G \rightarrow G$ con las propiedades siguientes:*

1) *Cerradura:*

$$g * h \in G \text{ para cualesquiera } g, h \in G.$$

2) *Asociativa:*

$$(g * h) * k = g * (h * k) \text{ para } g, h, k \in G.$$

3) *Existencia de neutro: Existe un elemento e en G , tal que*

$$e * g = g * e = g \text{ para todo } g \in G.$$

4) *Existencia de inverso: Para cada $g \in G$, existe otro elemento g^{-1} de G , tal que*

$$g^{-1} * g = g * g^{-1} = e.$$

Definición 1.2.2. Un **grupo abeliano** es un grupo G cuya operación cumple la propiedad conmutativa:

$$g * h = h * g \text{ con } g, h \in G.$$

Las definiciones 1.2.1 y 1.2.2 serán parte clave para algunas propiedades y demostraciones que involucran a las transformaciones rígidas. Dicho esto, procedemos con la definición de transformación rígida.

Definición 1.2.3. Una **transformación rígida** en el plano es una función $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que respeta las distancias entre puntos, es decir, $d(P, Q) = d(T(P), T(Q))$. A las transformaciones rígidas también se les conoce como **isometrías** por respetar las medidas.

Proposición 1.2.4. La composición de dos transformaciones rígidas en el plano es una transformación rígida.

Demostración. Sean $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos transformaciones rígidas. Entonces,

$$\begin{aligned} d((T_2 \circ T_1)(P), (T_2 \circ T_1)(Q)) &= d(T_2(T_1(P)), T_2(T_1(Q))) \\ &= d(T_1(P), T_1(Q)) \\ &= d(P, Q). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T_2 \circ T_1$ es una transformación rígida. □

Proposición 1.2.5. Toda isometría es inyectiva.

Demostración. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una isometría. Supongamos que

$$T(P) = T(Q)$$

con $P, Q \in \mathbb{R}^2$. Como T es una transformación rígida y $d(T(P), T(Q)) = 0$, entonces $d(P, Q) = 0$. Por lo que $P = Q$. □

Recordemos que una función biyectiva tiene inversa que también es biyectiva.

Proposición 1.2.6. Si T es una isometría y tiene inversa T^{-1} , entonces T^{-1} es una isometría.

Demostración. Sea $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función inversa de T . Sean $A, B \in \mathbb{R}^2$, como T es una transformación rígida y $d(A, B) = d(T(T^{-1}(A)), T(T^{-1}(B)))$, entonces $d(A, B) = d(T^{-1}(A), T^{-1}(B))$. Por lo que T^{-1} preserva distancias, es decir, T^{-1} es una isometría. □

Definición 1.2.7. Una *traslación en el plano por un vector fijo* $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$ es la transformación $T_{\bar{a}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T_{\bar{a}}(P) = P + \bar{a}$. Véase figura 1.7.

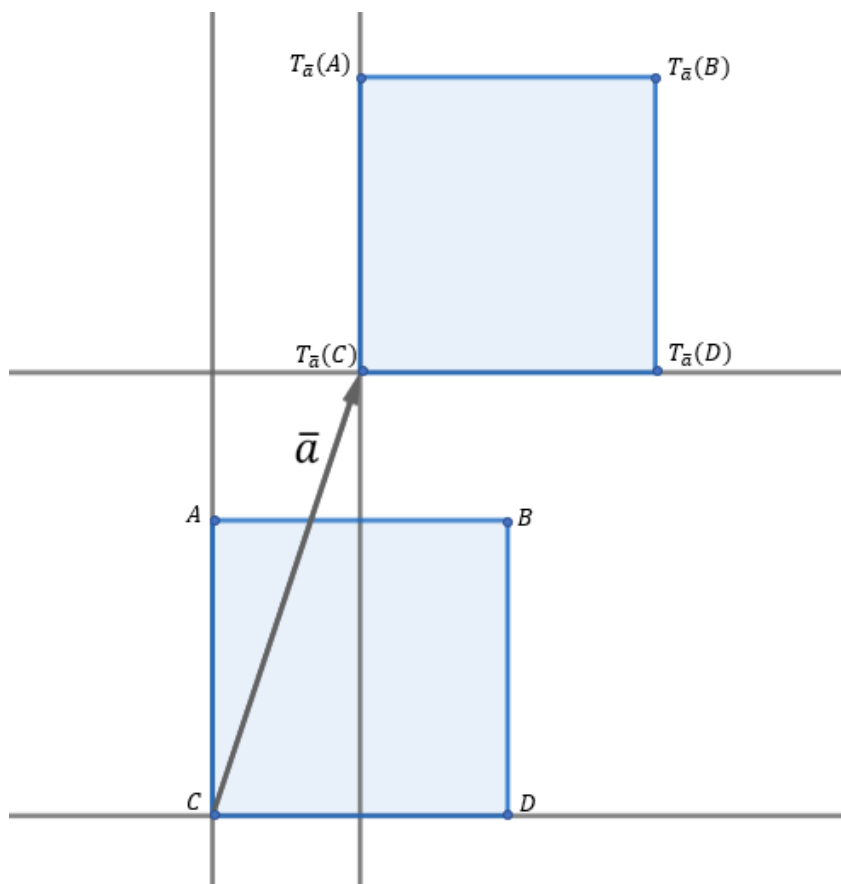


Figura 1.7: Traslación.

Proposición 1.2.8. Una *traslación es una transformación rígida*.

Demostración. Sean $P, Q \in \mathbb{R}^2$ y \bar{a} un vector, consideramos la traslación $T_{\bar{a}}$. Como

$$d(T_{\bar{a}}(P), T_{\bar{a}}(Q)) = \|(P + \bar{a}) - (Q + \bar{a})\| = \|P - Q\| = d(P, Q),$$

$T_{\bar{a}}$ es una transformación rígida. □

Dadas $T_{\bar{a}}, T_{\bar{b}}$ dos traslaciones. Observemos que

$$(T_{\bar{b}} \circ T_{\bar{a}})(P) = T_{\bar{b}}(T_{\bar{a}}(P)) = T_{\bar{b}}(P + \bar{a}) = (P + \bar{a}) + \bar{b} = P + (\bar{a} + \bar{b}) = T_{\bar{a} + \bar{b}}(P),$$

para cada $P \in \mathbb{R}^2$. Por lo que tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.2.9. *La composición $T_{\bar{b}} \circ T_{\bar{a}}$ de dos traslaciones es otra traslación, a saber $T_{\bar{a} + \bar{b}}$.*

Para los siguientes resultados, asumiremos que el plano \mathbb{R}^2 es un espacio vectorial cuyo el neutro aditivo $(0, 0)$ es denotado simplemente por 0 y el inverso aditivo de \bar{a} es $-\bar{a}$.

Proposición 1.2.10. *Las traslaciones del plano en el plano forman un grupo bajo la composición.*

Demostración. Sean $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^2$ y $T_{\bar{a}}, T_{\bar{b}}, T_{\bar{c}}$ las traslaciones respectivas en el plano \mathbb{R}^2 .

a) Cerradura.

Por la proposición 1.2.9 tenemos que para cada $P \in \mathbb{R}^2$, $(T_{\bar{b}} \circ T_{\bar{a}})(P) = T_{\bar{a} + \bar{b}}(P)$ es una traslación.

b) Asociativa.

Dado que $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$, tenemos que

$$\begin{aligned} ((T_{\bar{a}} \circ T_{\bar{b}}) \circ T_{\bar{c}})(P) &= (T_{\bar{b} + \bar{a}} \circ T_{\bar{c}})(P) \\ &= T_{\bar{c} + (\bar{b} + \bar{a})}(P) \\ &= (T_{\bar{a}} \circ T_{\bar{c} + \bar{b}})(P) \\ &= (T_{\bar{a}} \circ (T_{\bar{b}} \circ T_{\bar{c}}))(P) \end{aligned}$$

para cada $P \in \mathbb{R}^2$.

c) Existencia de neutro.

Proponemos a $T_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T_0(P) = P + 0 = Id(P)$.

Así,

$$(T_{\bar{a}} \circ T_0)(P) = T_{0 + \bar{a}}(P) = T_{\bar{a}}(P) = T_{\bar{a} + 0}(P) = (T_0 \circ T_{\bar{a}})(P)$$

para cada $P \in \mathbb{R}^2$.

d) Existencia de inverso.

Proponemos a $T_{-\bar{a}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T_{-\bar{a}}(P) = P + (-\bar{a})$, como la traslación inversa de $T_{\bar{a}}$.

En efecto, pues

$$(T_{\bar{a}} \circ T_{-\bar{a}})(P) = T_{(-\bar{a})+\bar{a}}(P) = T_0(P) = T_{\bar{a}+(-\bar{a})}(P) = (T_{-\bar{a}} \circ T_{\bar{a}})(P)$$

para cada $P \in \mathbb{R}^2$.

Por lo tanto, de a), b), c) y d) tenemos que el conjunto de traslaciones en el plano, es un grupo bajo la composición. \square

Definición 1.2.11. La *rotación por el ángulo θ en torno al origen en \mathbb{R}^2* es la función $Ro_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$Ro_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \text{sen } \theta \\ x \text{sen } \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Véase figura 1.8.

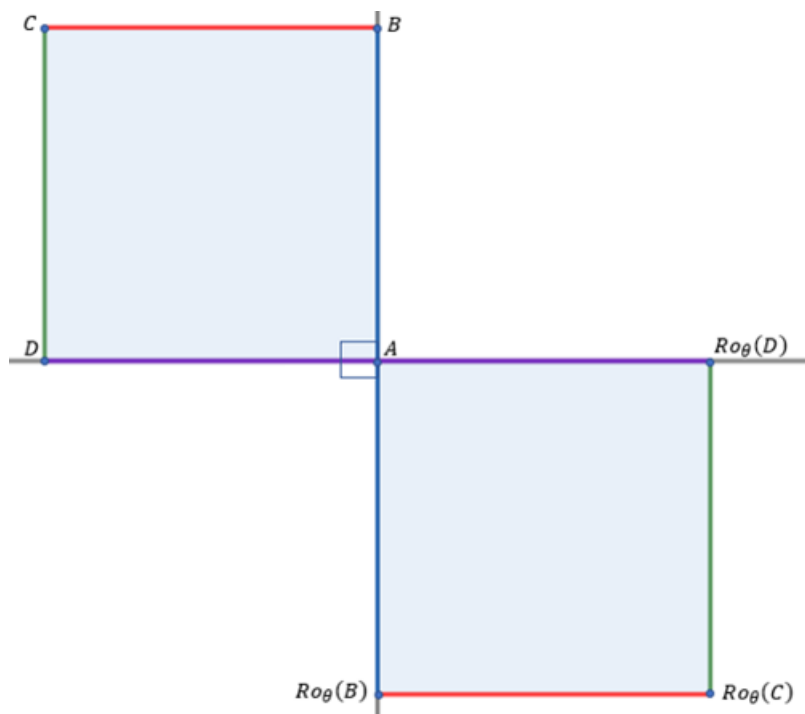


Figura 1.8: Rotación por un ángulo θ .

Lema 1.2.12. La rotación $Ro_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal y $\|Ro_\theta(P)\| = \|P\|$.

Demostración. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $P, Q \in \mathbb{R}^2$, donde $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$.

a)

$$\begin{aligned} Ro_\theta(P) + Ro_\theta(Q) &= \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta - y_1 \operatorname{sen} \theta \\ x_1 \operatorname{sen} \theta + y_1 \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \cos \theta - y_2 \operatorname{sen} \theta \\ x_2 \operatorname{sen} \theta + y_2 \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) \cos \theta - (y_1 + y_2) \operatorname{sen} \theta \\ (x_1 + x_2) \operatorname{sen} \theta + (y_1 + y_2) \cos \theta \end{pmatrix} = Ro_\theta(P + Q). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lambda Ro_\theta(P) &= \lambda \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta - y_1 \operatorname{sen} \theta \\ x_1 \operatorname{sen} \theta + y_1 \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda x_1) \cos \theta - (\lambda y_1) \operatorname{sen} \theta \\ (\lambda x_1) \operatorname{sen} \theta + (\lambda y_1) \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= Ro_\theta(\lambda P). \end{aligned}$$

Así, de a) y b) tenemos que Ro_θ es transformación lineal.

c)

$$\begin{aligned} \|Ro_\theta(P)\| &= \|(x_1 \cos \theta - y_1 \operatorname{sen} \theta, x_1 \operatorname{sen} \theta + y_1 \cos \theta)\| \\ &= \sqrt{(x_1 \cos \theta - y_1 \operatorname{sen} \theta)^2 + (x_1 \operatorname{sen} \theta + y_1 \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\ &= \|P\|. \end{aligned}$$

□

Observación 1.2.13. *La matriz*

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

es la representación matricial de la rotación Ro_θ en la base $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Además, tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

donde $a^2 + b^2 = 1$.

Proposición 1.2.14. *Una rotación es una transformación rígida.*

Demostración. Sean Ro_θ una rotación y $P, Q \in \mathbb{R}^2$. Como Ro_θ es lineal, $Ro_\theta(P - Q) = Ro_\theta(P) - Ro_\theta(Q)$. Por el lema 1.2.12,

$$d(Ro_\theta(P), Ro_\theta(Q)) = \|Ro_\theta(P) - Ro_\theta(Q)\| = \|Ro_\theta(P - Q)\| = \|P - Q\|.$$

Así, $d(Ro_\theta(P), Ro_\theta(Q)) = d(P, Q)$. \square

Proposición 1.2.15. *La composición, $Ro_\theta \circ Ro_\phi$, de dos rotaciones en torno al origen está definida por la matriz correspondiente a la rotación por el ángulo $\theta + \phi$.*

Demostración. Sean Ro_θ, Ro_ϕ dos rotaciones en torno al origen. Por la observación 1.2.13, haciendo $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta$, $c = \cos \phi$, $d = \sin \phi$ tenemos que $Ro_\theta = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ y $Ro_\phi = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$. Entonces

$$\begin{aligned} (Ro_\theta \circ Ro_\phi)(x, y) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xc - yd \\ xd + yc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ((xc - yd)(a)) + ((xd + yc)(-b)) \\ ((xc - yd)(b)) + ((xd + yc)(a)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ((ac - bd)(x)) + (-(ad + bc)(y)) \\ ((cb + ad)(x)) + ((-bd + ca)(y)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ac - bd) & -(ad + bc) \\ (ad + bc) & +(ac - bd) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cdot \cos \phi + \cos \theta \cdot \sin \phi$ y $\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cdot \cos \phi - \sin \theta \cdot \sin \phi$, tenemos que $ac - bd = \cos(\theta + \phi)$ y $ad + bc = \sin(\theta + \phi)$. Por lo tanto, la composición de dos rotaciones, $Ro_\theta \circ Ro_\phi$, está definida por la matriz correspondiente a la rotación por el ángulo $\theta + \phi$. \square

Dado que las funciones \sin y \cos son periódicas tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.2.16. *Hay una correspondencia biunívoca entre las rotaciones en torno al origen por un ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ y las matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a^2 + b^2 = 1$.*

La composición de rotaciones se expresa como el producto de las matrices asociadas respectivas. Se sugiere consultar [4, 2.3 Composition of Linear Transformations and Matrix Multiplication, pág. 88].

Teorema 1.2.17. *Las rotaciones en torno al origen en \mathbb{R}^2 forman un grupo abeliano.*

Demostración. Sean Ro_ϕ , Ro_θ y Ro_γ , tres rotaciones en \mathbb{R}^2 . Por la observación 1.2.13 y el corolario 1.2.16, haciendo $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta$, $c = \cos \phi$, $d = \sin \phi$, $e = \cos \gamma$ y $f = \sin \gamma$, tenemos que $Ro_\theta = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $Ro_\phi = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ y $Ro_\gamma = \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix}$.

a) Cerradura.

Por la proposición 1.2.15 tenemos que

$$Ro_\phi \circ Ro_\theta \text{ es la rotación } Ro_{\theta+\phi}.$$

b) Asociativa.

Basta que ver que el producto de matrices es asociativo.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ bc + ad & -bd + ac \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} ((ac - bd)e) + ((-ad - bc)f) & (ac - bd)(-f) + ((-ad - bc)e) \\ ((bc + ad)e) + ((-bd + ac)f) & (bc + ad)(-f) + ((-bd + ac)e) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} (a(ce - df)) + (-b(de + cf)) & (a(-cf - de)) + (-b(-df + ce)) \\ (b(ce - df)) + (a(de + cf)) & (b(-cf - de)) + (a(-df + ce)) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ce - df & -cf - de \\ de + cf & -df + ce \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

c) Existencia de neutro.

Proponemos a $Ro_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$Ro_0 = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1) - b(0) & a(0) - b(1) \\ b(1) + a(0) & b(0) + a(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 1(a) + 0(b) & 1(-b) + 0(a) \\ 0(a) + 1(b) & 0(-b) + 1(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Existencia de inverso.

Para Ro_θ , proponemos a $Ro_\theta^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, por la matriz

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$Ro_{\theta}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a(a) - b(-b) & a(b) - b(a) \\ b(a) + a(-b) & b(b) + a(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(a) + b(b) & a(-b) + b(a) \\ -b(a) + a(b) & -b(-b) + a(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto de a), b), c) y d) tenemos que el conjunto de rotaciones en torno al origen en \mathbb{R}^2 es un grupo.

Ahora, veamos que es abeliano. Con la notación previa,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a(d) - b(c) & a(-c) - b(d) \\ b(d) + a(c) & b(-c) + a(d) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d(a) - c(b) & d(-b) + -c(a) \\ c(a) + d(b) & c(-b) + d(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el conjunto de rotaciones en torno al origen en \mathbb{R}^2 es un grupo abeliano. \square

Definición 1.2.18. La *reflexión en el plano respecto a la recta \mathcal{L}_{ϕ}* que pasa por el origen y forma un ángulo ϕ con la parte positiva del eje X , es la función $Re_{\phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$Re_{\phi}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \operatorname{sen} 2\phi \\ \operatorname{sen} 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos 2\phi + y \operatorname{sen} 2\phi \\ x \operatorname{sen} 2\phi - y \cos 2\phi \end{pmatrix}.$$

Véase figura 1.9.

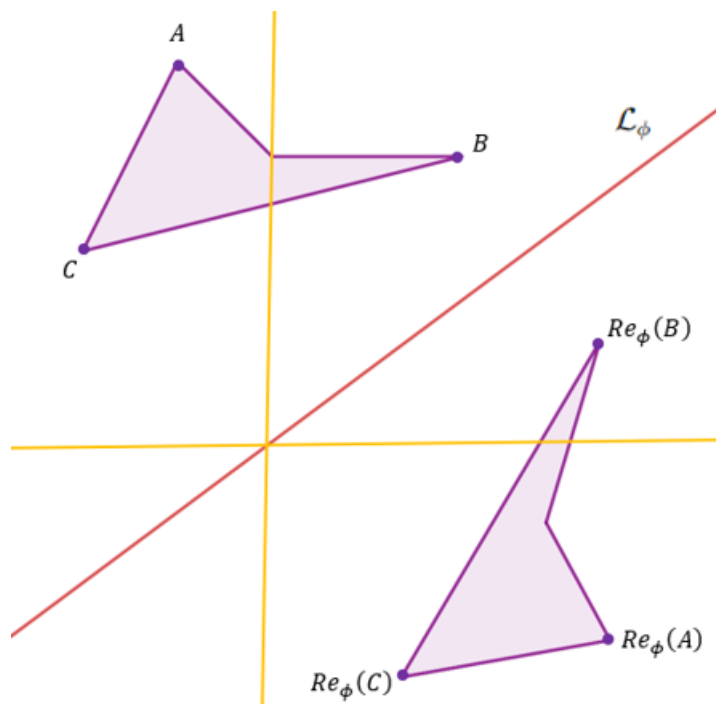


Figura 1.9: Reflexión respecto a la recta \mathcal{L}_ϕ .

Lema 1.2.19. La reflexión $Re_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal y $\|Re_\theta(P)\| = \|P\|$.

Demostración. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $P, Q \in \mathbb{R}^2$, donde $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$.

a)

$$\begin{aligned} Re_\theta(P) + Re_\theta(Q) &= \begin{pmatrix} x_1 \cos 2\theta + y_1 \sin 2\theta \\ x_1 \sin 2\theta - y_1 \cos 2\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \cos 2\theta + y_2 \sin 2\theta \\ x_2 \sin 2\theta - y_2 \cos 2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) \cos 2\theta + (y_1 + y_2) \sin 2\theta \\ (x_1 + x_2) \sin 2\theta - (y_1 + y_2) \cos 2\theta \end{pmatrix} = Re_\theta(P + Q). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lambda Re_\theta(P) &= \lambda \begin{pmatrix} x_1 \cos 2\theta + y_1 \sin 2\theta \\ x_1 \sin 2\theta - y_1 \cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda x_1) \cos 2\theta + (\lambda y_1) \sin 2\theta \\ (\lambda x_1) \sin 2\theta - (\lambda y_1) \cos 2\theta \end{pmatrix} \\ &= Re_\theta(\lambda P). \end{aligned}$$

Así, de a) y b) tenemos que Re_θ es transformación lineal.

c)

$$\begin{aligned} \|Re_\theta(P)\| &= \|(x_1 \cos 2\theta + y_1 \sen 2\theta, x_1 \sen 2\theta - y_1 \cos 2\theta)\| \\ &= \sqrt{(x_1 \cos 2\theta + y_1 \sen 2\theta)^2 + (x_1 \sen 2\theta - y_1 \cos 2\theta)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\ &= \|P\|. \end{aligned}$$

□

Observación 1.2.20. *La matriz*

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & + \sen 2\theta \\ \sen 2\theta & - \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

es la representación matricial de la reflexión Re_θ en la base $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Además, tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

donde $a^2 + b^2 = 1$.

Dado que las funciones sen y cos son periódicas tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.2.21. *Hay una correspondencia biunívoca entre las reflexiones y las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ con $a^2 + b^2 = 1$.*

Proposición 1.2.22. *Las reflexiones son transformaciones rígidas.*

Demostración. Sean $P, Q \in \mathbb{R}^2$, \mathcal{L}_ϕ una recta por el origen y Re_ϕ la reflexión respecto a la recta \mathcal{L}_ϕ . Como Re_ϕ es lineal, $Re_\phi(P - Q) = Re_\phi(P) - Re_\phi(Q)$. Por el lema 1.2.19,

$$d(Re_\phi(P), Re_\phi(Q)) = \|Re_\phi(P) - Re_\phi(Q)\| = \|Re_\phi(P - Q)\| = \|P - Q\|.$$

Así, $d(Re_\phi(P), Re_\phi(Q)) = d(P, Q)$. □

Así, como se trabajó con las rotaciones se hará lo mismo con las reflexiones.

Proposición 1.2.23. *La composición de dos reflexiones en el plano, es una rotación en torno al origen.*

Demostración. Sean $\mathcal{L}_\theta, \mathcal{L}_\phi$ rectas por el origen, Re_θ y Re_ϕ las reflexiones respecto a \mathcal{L}_θ y \mathcal{L}_ϕ , respectivamente. Por la observación 1.2.20, haciendo $a = \cos 2\theta$, $b = \sin 2\theta$, $c = \cos 2\phi$, $d = \sin 2\phi$ tenemos que $Re_\theta = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ y $Re_\phi = \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$. Entonces

$$\begin{aligned}
(Re_\theta \circ Re_\phi)(x, y) &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xc + yd \\ xd - yc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ((xc + yd)(a)) + ((xd - yc)(b)) \\ ((xc + yd)(b)) + ((xd - yc)(-a)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ((ac + bd)(x)) + ((ad - cb)(y)) \\ ((cb - ad)(x)) + ((bd + ca)(y)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (ac + bd) & -(-ad + bc) \\ (-ad + bc) & +(ac + bd) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Como $\sin(\theta - \phi) = \sin \theta \cdot \cos \phi - \cos \theta \cdot \sin \phi$ y $\cos(\theta - \phi) = \cos \theta \cdot \cos \phi + \sin \theta \cdot \sin \phi$, tenemos que $ac + bd = \cos(\theta - \phi)$ y $-ad + bc = \sin(\theta - \phi)$. Por lo tanto, la composición de dos reflexiones, $Re_\theta \circ Re_\phi$, está definida por la matriz correspondiente a la rotación por el ángulo $\theta - \phi$. \square

Teorema 1.2.24. *El conjunto de rotaciones en \mathbb{R}^2 en torno a $(0, 0)$ y reflexiones respecto a una recta por $(0, 0)$, forman un grupo bajo la composición.*

Demostración. Sean $Re_\phi, Re_\theta, Re_\gamma, Ro_\gamma, Ro_\phi, Ro_\theta$, reflexiones y rotaciones en \mathbb{R}^2 . Por las observaciones 1.2.13 y 1.2.20, haciendo $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta$, $c = \cos \phi$, $d = \sin \phi$, $e = \cos \gamma$, $f = \sin \gamma$, $g = \cos 2\theta$, $h = \sin 2\theta$, $i = \cos 2\phi$, $j = \sin 2\phi$, $k = \cos 2\gamma$, $l = \sin 2\gamma$, tenemos que $Ro_\theta = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $Ro_\phi = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, $Ro_\gamma = \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix}$, $Re_\theta = \begin{pmatrix} g & h \\ h & -g \end{pmatrix}$, $Re_\phi = \begin{pmatrix} i & j \\ j & -i \end{pmatrix}$ y $Re_\gamma = \begin{pmatrix} k & l \\ l & -k \end{pmatrix}$.

a) Cerradura.

Por las proposiciones 1.2.15 y 1.2.23, la composición de rotaciones es una rotación y la composición de reflexiones es una rotación.

Por lo que basta probar que la composición entre una reflexión y una rotación es una reflexión o una rotación.

Consideremos Ro_θ, Re_ϕ

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ j & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ai - bj & aj + bi \\ bi + aj & bj - ai \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ n & -m \end{pmatrix}.$$

Donde $m = ai - bj$ y $n = aj + bi$. Notemos que esta última matriz representa una reflexión. De la misma forma $Re_\phi \circ Ro_\theta$ es una reflexión.

b) Asociativa.

Se sigue de que el producto de matrices de 2×2 es asociativo.

Esto se puede consultar en [4, 2.3 Composition of Linear Transformations and Matrix Multiplication, pág. 93].

c) Existencia de neutro.

Para cada Ro_θ , por el teorema 1.2.17, el neutro es $Ro_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además, para cada reflexión Re_θ , tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g & h \\ h & -g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} g(1) + h(0) & g(0) + h(1) \\ h(1) - g(0) & h(0) - g(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h \\ h & -g \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1(g) + 0(h) & 1(h) + 0(-g) \\ 0(g) + 1(h) & 0(h) + 1(-g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & h \\ h & -g \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Existencia de inverso.

Para cada rotación Ro_θ , por el teorema 1.2.17, existe $Ro_\theta^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Para cada reflexión $Re_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, observemos que $Re_\theta \circ Re_\theta = Ro_0$, pues

$$\begin{pmatrix} g & h \\ h & -g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & h \\ h & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(g) + h(h) & g(h) + h(-g) \\ h(g) - g(h) & h(h) - g(-g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto de a), b), c) y d) tenemos que el conjunto de rotaciones en torno al origen y las reflexiones en el plano, es un grupo. \square

Definición 1.2.25. El grupo, bajo la composición, formado por rotaciones en \mathbb{R}^2 en torno a $(0,0)$ y reflexiones respecto a rectas por $(0,0)$, se llama **el grupo ortogonal real de orden 2** y se denota por $O(2, \mathbb{R})$.

Definición 1.2.26. El grupo de rotaciones en \mathbb{R}^2 , se llama el **grupo ortogonal especial** y se denota por $SO(2, \mathbb{R})$.

Definición 1.2.27. Una función $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación ortogonal, si preserva al producto interior. Es decir, si para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$ se cumple que

$$T(u) \cdot T(v) = u \cdot v.$$

Proposición 1.2.28. Si $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación ortogonal, entonces T es una isometría.

Demostración. Sean T una transformación ortogonal y $A, B \in \mathbb{R}^2$. Entonces

$$\begin{aligned} d(T(A), T(B))^2 &= \|T(A) - T(B)\|^2 \\ &= (T(A) - T(B)) \cdot (T(A) - T(B)) \\ &= (T(A) \cdot T(A)) - 2(T(A) \cdot T(B)) + (T(B) \cdot T(B)) \\ &= (A \cdot A) - 2(A \cdot B) + (B \cdot B) \\ &= (A - B) \cdot (A - B) \\ &= \|A - B\|^2 \\ &= d(A, B)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es una isometría. \square

Proposición 1.2.29. Si T es una transformación ortogonal, entonces $T(0) = 0$.

Demostración. Sean $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación ortogonal y $A \in \mathbb{R}^2$. Por la proposición 1.2.28, T es una isometría. Entonces $\|A\| = \|T(A)\|$. En particular, si $A = 0$, entonces $0 = \|0\| = \|T(0)\|$. \square

Ejemplo 1.2.30. Las traslaciones no son transformaciones ortogonales.

Proposición 1.2.31. Si $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación rígida y $T(0) = 0$, entonces T preserva el producto interior, es decir, si $P, Q \in \mathbb{R}^2$ entonces $T(P) \cdot T(Q) = P \cdot Q$.

Demostración. Como $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación rígida, $\|T(P) - T(Q)\| = \|P - Q\|$. Trabajando con ésta igualdad, tenemos que

$$\begin{aligned} \|T(P) - T(Q)\|^2 &= \|P - Q\|^2 \\ \|T(P)\|^2 - 2(T(P) \cdot T(Q)) + \|T(Q)\|^2 &= \|P\|^2 - 2(P \cdot Q) + \|Q\|^2 \\ -2(T(P) \cdot T(Q)) &= -2(P \cdot Q) \\ T(P) \cdot T(Q) &= P \cdot Q. \end{aligned}$$

Así, T preserva el producto interior. □

Observemos que rotaciones en \mathbb{R}^2 en torno al origen, Ro_θ , y reflexiones respecto a una recta por $(0,0)$, Re_ϕ , son transformaciones rígidas que cumplen que $Ro_\theta(0) = 0$ y $Re_\phi(0) = 0$. Así, por el teorema 1.2.31, tenemos que son transformaciones que preservan el producto interior, es decir, por la definición 1.2.27 son transformaciones ortogonales. De ahí el nombre de grupo ortogonal. Ahora, con el siguiente teorema generalizamos las transformaciones rígidas.

Teorema 1.2.32. *Cualquier transformación rígida es composición de una traslación con una transformación ortogonal.*

Demostración. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación rígida, donde $T(0) = \bar{a}$. Definimos a $U = T_{-\bar{a}} \circ T$, recordemos que $T_{-\bar{a}}$ denota una traslación. Por hipótesis, T es una transformación rígida. De las proposiciones 1.2.8 y 1.2.4 tenemos que U es transformación rígida. Notemos que $U(0) = T_{-\bar{a}} \circ T(0) = T_{-\bar{a}}(T(0)) = T_{-\bar{a}}(\bar{a}) = \bar{a} - \bar{a} = 0$, con ello concluimos que U fija 0. Por la definición 1.2.27 y la proposición 1.2.28, U es una transformación ortogonal y una isometría. Como $T_{-\bar{a}}$ es una traslación, por la proposición 1.2.8, existe $T_{\bar{a}}$ tal que $T_{\bar{a}} \circ T_{-\bar{a}} = T_0 = Id$. Entonces

$$T_{\bar{a}} \circ U = T_{\bar{a}} \circ (T_{-\bar{a}} \circ T) = T$$

Así, la transformación rígida T es la composición de una transformación ortogonal y una traslación. □

Corolario 1.2.33. *La composición mencionada en el teorema 1.2.32 es única.*

Demostración. Supongamos que $T = T_{\bar{a}} \circ U$, $T = T_{\bar{b}} \circ V$ donde U, V son ortogonales, así $U(0) = V(0) = 0$. Como $\bar{a} = 0 + \bar{a} = T_{\bar{a}}(0) = T_{\bar{a}}(U(0)) = T(0)$ y $T(0) = T_{\bar{b}}(V(0)) = T_{\bar{b}}(0) = 0 + \bar{b} = \bar{b}$, $T_{\bar{a}} = T_{\bar{b}}$. Por lo que $U = V$. □

Definición 1.2.34. *El grupo de las transformaciones rígidas del plano en el plano es el **grupo euclidiano de orden 2**, denotado por $E(2)$.*

Capítulo 2

FRISOS Y MOSAICOS

Inmensas... es ahora cuando empezamos a hablar más de “frisos y mosaicos”, el adentrarnos poco a poco en la construcción y propiedades de estos, nos permitirá conocerlos mejor y así poder visualizarlos más allá del espacio vectorial \mathbb{R}^2 . Éste capítulo contiene 2 secciones, en la primera abordamos frisos y en la segunda, mosaicos.

2.1. Frisos

Para poder recubrir el plano, es necesario poder fijar la vista en sólo un trozo de éste. Por consiguiente, analizar el posible comportamiento del patrón seleccionado en este trozo, usando las simetrías estudiadas en el capítulo anterior. De esto, comenzar con el tema de frisos es lo ideal.

Es importante comentar que para esta parte tomamos como base [2, 1.6. Frisos y Mosaicos, pág. 71].

Definición 2.1.1. Una *traslapación* sucede cuando dados $W, Y \subset \mathbb{R}^2$, existe al menos un punto $P \in W \cap Y$ y además $W \neq Y$.

Definición 2.1.2. Un *friso* es el cubrimiento, por medio de un patrón, de la región del plano, de longitud infinita pero de anchura finita, limitada por rectas paralelas, sin que sucedan traslapaciones.

Construcción 2.1.3. Para construir un *friso*, trazamos una recta \mathcal{L} en el plano y observamos dos reglas:

1) Usar un patrón con la base marcada y de longitud a , donde $a \in \mathbb{R}$, véase figura 2.1.

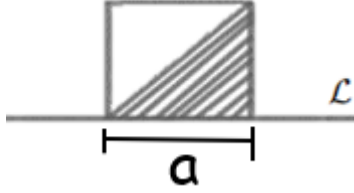


Figura 2.1: Patrón.

2) Si el patrón se usa en un lado de la recta, no es válido volverlo a usar con otra posición del mismo lado en ese tramo, pues eso equivaldría a tener otro patrón. La base debe permanecer en la recta \mathcal{L} .

Dado que un friso es infinito y esta determinado por una recta, es importante analizar las isometrías que mantienen invariante una recta dada.

Lema 2.1.4. Sea \mathcal{L} una recta en el plano \mathbb{R}^2 . Las traslaciones en la dirección de la recta \mathcal{L} dejan invariante la recta \mathcal{L} .

Demostración. Supongamos que \mathcal{L} es una recta por el origen y $T_{\bar{a}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una traslación definida por $T_{\bar{a}}(P) = P + \bar{a}$ para $P \in \mathbb{R}^2$ y \bar{a} es un vector de dirección de \mathcal{L} . Así, la ecuación vectorial de \mathcal{L} , $V = P_0 + \lambda\bar{a}$ donde P_0 es un punto por donde pasa la recta. Ahora, si $Q \in \mathcal{L}$, entonces $Q = P_0 + \lambda_Q\bar{a}$ para algún $\lambda_Q \in \mathbb{R}$. Aplicando $T_{\bar{a}}$ a Q obtenemos

$$\begin{aligned} T_{\bar{a}}(Q) &= Q + \bar{a} \\ &= (P_0 + \lambda_Q\bar{a}) + \bar{a} \\ &= P_0 + (\lambda_Q + 1)\bar{a}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T_{\bar{a}}(Q) \in \mathcal{L}$. □

Lema 2.1.5. Sea \mathcal{L} una recta en el plano \mathbb{R}^2 . La rotación por el ángulo π en torno a un punto de la recta \mathcal{L} , deja invariante la recta \mathcal{L} .

Demostración. Sea \mathcal{L} una recta en el plano, sin pérdida de generalidad podemos suponer que \mathcal{L} es el eje X . Sea Ro_π la rotación por el ángulo π en torno al origen en \mathbb{R}^2 . Supongamos que $K = (m, 0)$ y Ro'_π es la rotación por el ángulo π en torno a K . Observemos que $T_{-K}(K) = 0$, donde T_{-K} es la traslación por el vector $(-m, 0)$. $T_{-K}(Q) = (x - m, 0)$, si $Q = (x, 0)$. Por otro lado,

$$Ro_\pi(x - m, 0) = \begin{pmatrix} \cos \pi & -\operatorname{sen} \pi \\ \operatorname{sen} \pi & \cos \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + m \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo que, Ro_π deja invariante el eje X . Notemos que $T_{-K} \circ Ro'_\pi = Ro_\pi \circ T_{-K}$, entonces $T_{-K}^{-1}(-x + m, 0) = (-x + m + m, 0)$. Así, $Ro'_\pi \in \mathcal{L}$. \square

Lema 2.1.6. *Sea \mathcal{L} una recta en el plano \mathbb{R}^2 . La reflexión respecto a la recta \mathcal{V} que es perpendicular a \mathcal{L} y la reflexión respecto a \mathcal{L} , dejan invariante la recta \mathcal{L} .*

Demostración. Sea \mathcal{L} una recta en el plano, sin pérdida de generalidad podemos suponer que \mathcal{L} es el eje X . Sean \mathcal{V} es el eje Y y $Re_{\frac{\pi}{2}}$ la reflexión con respecto a la recta \mathcal{V} . Supongamos que $Re'_{\frac{\pi}{2}}$ la reflexión con respecto a la recta \mathcal{V}' , donde \mathcal{V}' pasa por el punto $K = (m, 0)$ un elemento del eje X y es perpendicular a \mathcal{L} . Observemos que $T_{-K}(K) = 0$, donde T_{-K} es la traslación por el vector $(-m, 0)$. $T_{-K}(Q) = (x - m, 0)$ si $Q = (x, 0)$. Por otro lado,

$$Re_{\frac{\pi}{2}}(x - m, 0) = \begin{pmatrix} \cos 2(\frac{\pi}{2}) & -\operatorname{sen} 2(\frac{\pi}{2}) \\ \operatorname{sen} 2(\frac{\pi}{2}) & \cos 2(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + m \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo que, $Re_{\frac{\pi}{2}}$ deja invariante el eje X . Notemos que $T_{-K} \circ Re'_{\frac{\pi}{2}} = Re_{\frac{\pi}{2}} \circ T_{-K}$, entonces $T_{-K}^{-1}(-x + m, 0) = (-x + m + m, 0)$. Así, $Re'_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}$. \square

A continuación, se procede a construir 7 tipos diferentes de frisos en los que cada centro de simetría es identificado con un punto azul y un eje de simetría por una línea de color rojo. Para la construcción se establece la siguiente:

Notación 2.1.7. *Sea \mathcal{L} una recta en el plano \mathbb{R}^2 .*

- F denota el patrón, conformado por el triángulo que resulta al cortar un rectángulo (con base de longitud a) a lo largo de una diagonal.
- Dada la recta \mathcal{L} en el plano \mathbb{R}^2 , consideramos $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$ un vector de dirección de \mathcal{L} , tal que $\|\bar{a}\| = a$.
- 0 denota un punto “inicial” en \mathcal{L} .
- A denota el punto de \mathcal{L} correspondiente al punto final del segmento de longitud $|a|$ con punto inicial 0 .
- nA denota el punto de \mathcal{L} correspondiente al punto final del segmento de longitud $|na|$ con punto inicial 0 , donde $n \in \mathbb{Z}$ y $n\bar{a}$ es un vector de dirección de \mathcal{L} .

- $T_{n\bar{a}}$ denota la traslación por $n\bar{a}$, donde $n \in \mathbb{Z}$. Observemos que el patrón no se traslapa al trasladarlo por $n\bar{a}$.
- rA denota el punto de \mathcal{L} correspondiente al punto final del segmento de longitud $|ra|$ con punto inicial 0 , donde r es de la forma $\frac{2n-1}{2}$ con $n \in \mathbb{Z}$ y $r\bar{a}$ es un vector de dirección de \mathcal{L} .
- σ_{rA} denota la rotación por 180° en torno a un punto $rA \in \mathcal{L}$.
- $Re_{\mathcal{L}}$ denota la reflexión con respecto a la recta \mathcal{L} .
- $Re_{\mathcal{V}}$ denota la reflexión con respecto a la recta \mathcal{V} que es perpendicular a \mathcal{L} que pasa por un punto de la forma nA ; al utilizar tal reflexión, tenemos que $2n\bar{a}$ es el vector correspondiente a una traslación que deja invariante a la recta \mathcal{L} .
- γ denota la composición $T_{\bar{a}} \circ Re_{\mathcal{L}}$ llamada el “paso”.

Con esta notación procedemos a la construcción de los siete diferentes frisos.

FRISO F_1

- 1) Tomamos el patrón F . Véase figura 2.2.



Figura 2.2: Patrón F .

- 2) Aplicando a F la traslación $T_{\bar{a}}$ por el vector de dirección \bar{a} . Véase figura 2.3.

Como el friso es infinito, aplicamos a F únicamente la traslación $T_{\bar{a}}$ repetidamente para obtener a F_1 . En la figura 2.4 se muestra un trozo de F_1 . Por la construcción, el subgrupo de $E(2)$ generado por la traslación $T_{\bar{a}}$, denotado por $G_1 = \langle T_{\bar{a}} \rangle$, deja invariante a F_1 .

Notemos que en F_1 , no hay centros ni ejes de simetría.

FRISO F_2

- 1) Tomamos el patrón F . Véase figura 2.2.
- 2) Aplicando a F la rotación $\sigma_{\frac{1}{2}A}$, tenemos la figura 2.5.

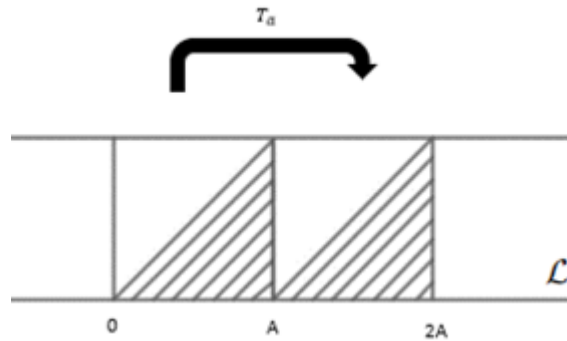


Figura 2.3: Traslación por el vector de dirección \bar{a} .



Figura 2.4: Trozo del friso F_1 .

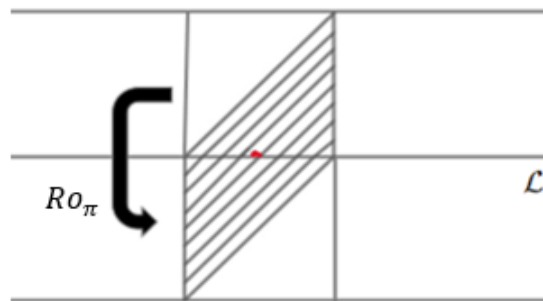


Figura 2.5: Rotación de 180° en torno al punto $\frac{1}{2}A$.

3) Se traslada lo obtenido por $T_{\bar{a}}$, véase figura 2.6.

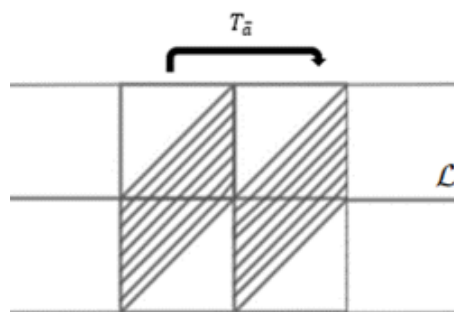


Figura 2.6: Traslación por el vector de dirección \bar{a} .

Al aplicar repetidamente $\sigma_{\frac{1}{2}A}$ y $T_{\bar{a}}$ se obtiene el friso F_2 , en la figura 2.7 se muestra un trozo de F_2 . Por la construcción, el subgrupo $G_2 = \langle \sigma_{\frac{1}{2}A}, T_{\bar{a}} \rangle$ deja invariante a F_2 . Observemos que $\sigma_{\frac{1}{2}A}^2 = Id$ y $\sigma_{\frac{1}{2}A} \circ T_{\bar{a}} \circ \sigma_{\frac{1}{2}A} = T_{\bar{a}}^{-1}$.

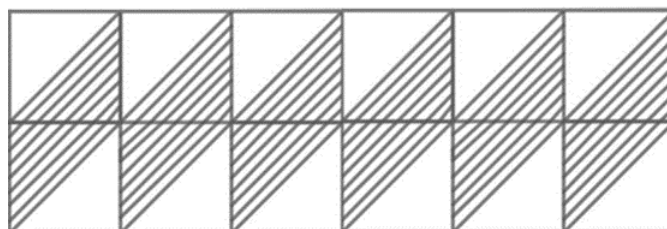


Figura 2.7: Trozo del friso F_2 .

En el friso F_2 hay centros de simetría y son los puntos de la forma $\frac{nA}{2}$ donde $n \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, en éste friso no hay ejes de simetría. Véase figura 2.8.

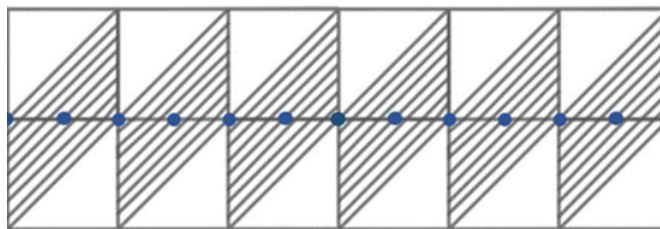


Figura 2.8: Centros de simetría en el friso F_2 .

FRISO F_3

- 1) Tomamos el patrón F . Véase figura 2.2.
- 2) Aplicamos a F una reflexión $Re_{\mathcal{L}}$. Véase figura 2.9.

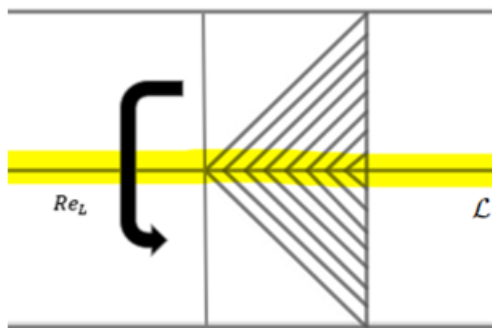


Figura 2.9: Reflexión con respecto a la recta \mathcal{L} .

- 3) Se traslada lo obtenido por $T_{\bar{a}}$. Como se muestra en la figura 2.10.

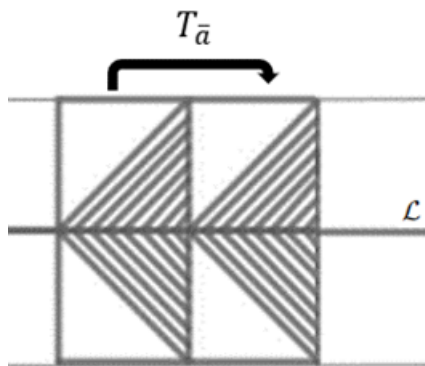


Figura 2.10: Traslación por el vector de dirección \bar{a} .

Al aplicar repetidamente $Re_{\mathcal{L}}$ y $T_{\bar{a}}$ obtenemos el friso F_3 . En la figura 2.11 se muestra un trozo del friso F_3 . Por la construcción, el subgrupo $G_3 = \langle Re_{\mathcal{L}}, T_{\bar{a}} \rangle$ deja invariante a F_3 . Observemos que $Re_{\mathcal{L}}^2 = Id$.

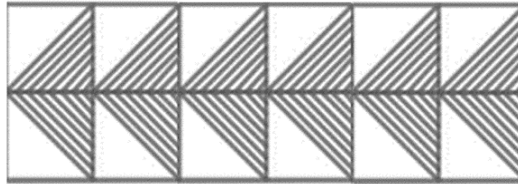


Figura 2.11: Trozo del friso F_3 .

En el friso F_3 no hay centros de simetría. Sin embargo, en éste friso hay un eje de simetría, el cuál es la recta \mathcal{L} . Véase figura 2.12.

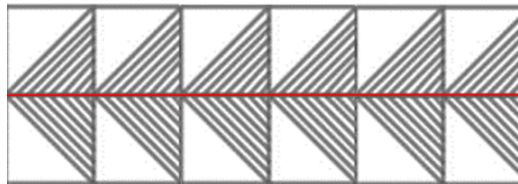


Figura 2.12: Eje de simetría del friso F_3 .

FRISO F_4

- 1) Tomamos el patrón F . Véase figura 2.2.
- 2) Se aplica a F una reflexión $Re_{\mathcal{V}}$. Véase figura 2.13.

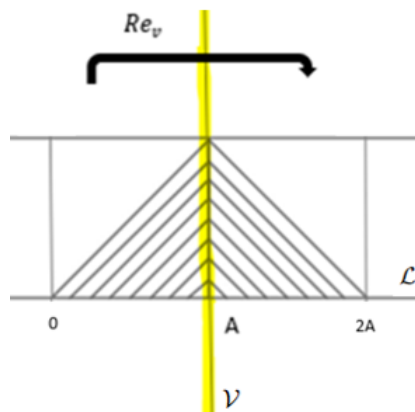


Figura 2.13: Reflexión con respecto a la recta \mathcal{V} .

3) Se traslada lo obtenido por $T_{2\bar{a}}$, véase figura 2.14.

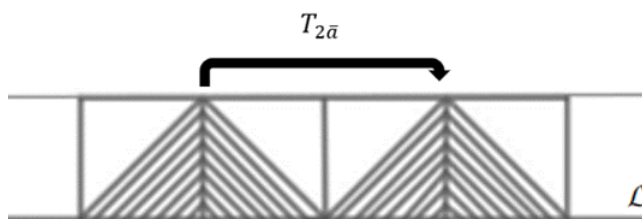


Figura 2.14: Traslación por el vector de dirección $2\bar{a}$.

Al aplicar repetidamente Re_{γ} y $T_{2\bar{a}}$ obtenemos el friso F_4 . En la figura 2.15 se muestra un trozo del friso F_4 . Por la construcción, el subgrupo $G_4 = \langle Re_{\gamma}, T_{2\bar{a}} \rangle$ deja invariante a F_4 . Observemos que $Re_{\gamma}^2 = Id$ y $Re_{\gamma} \circ T_{2\bar{a}} \circ Re_{\gamma} = T_{2\bar{a}}^{-1}$.



Figura 2.15: Trozo del friso F_4 .

En el friso F_4 no hay centros de simetría. Sin embargo, en éste friso hay ejes de simetría, los cuáles son las rectas verticales a la recta \mathcal{L} , que pasan por los puntos de la forma nA con $n \in \mathbb{Z}$. Véase figura 2.16.



Figura 2.16: Ejes de simetría del friso F_4 .

FRISO F_5

- 1) Tomamos el patrón F . Véase figura 2.2
- 2) Se aplica a F el paso, γ . Véase figura 2.17.

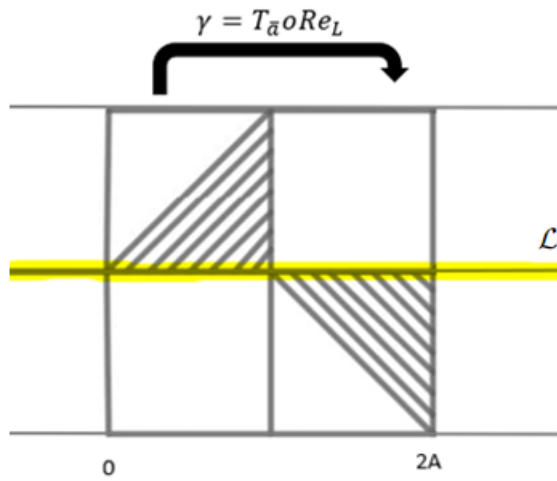


Figura 2.17: El paso.

3) A lo obtenido se aplica nuevamente el paso, γ . Véase figura 2.18.

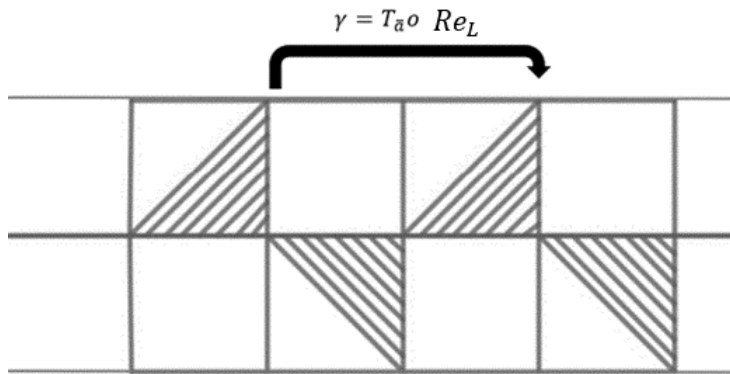


Figura 2.18: Segunda aplicación del paso.

Al aplicar repetidamente γ obtenemos el friso F_5 . En la figura 2.19 se muestra un trozo del friso F_5 . Por la construcción, el subgrupo $G_5 = \langle \gamma \rangle$ deja invariante a F_5 . Observemos que $\gamma^2 = T_{2a}$.

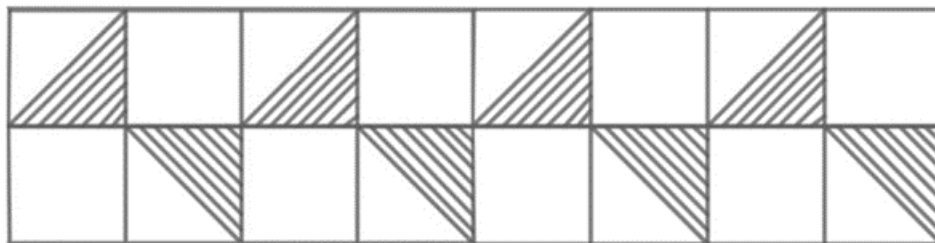


Figura 2.19: Trozo del friso F_5 .

En el friso F_5 no hay centros ni ejes de simetría.

FRISO F_6

- 1) Tomamos el patrón F . Véase figura 2.2.
- 2) Se aplica a F la reflexión $Re_{\mathcal{L}}$. Véase figura 2.9.
- 3) Se aplica a lo obtenido una reflexión $Re_{\mathcal{V}}$. Véase figura 2.20.

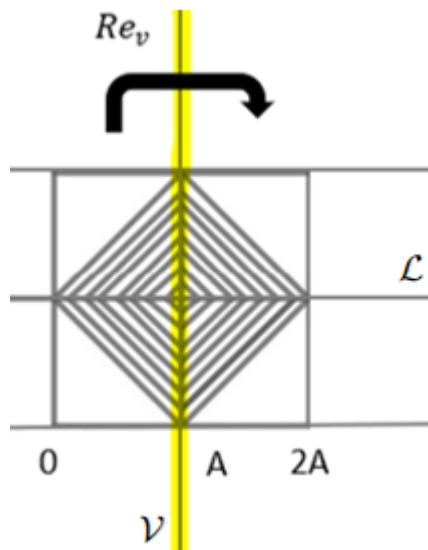


Figura 2.20: Reflexión con respecto a la recta \mathcal{V} .

- 4) Se traslada lo obtenido por $T_{2\bar{a}}$, véase figura 2.21.

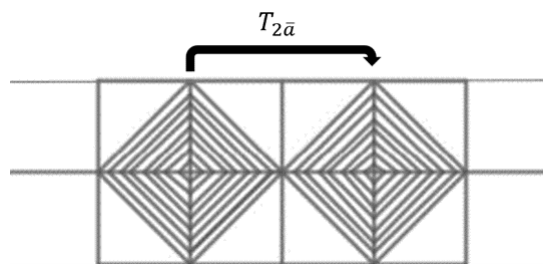


Figura 2.21: Traslación por el vector de dirección $2\bar{a}$.

Al aplicar repetidamente $Re_{\mathcal{L}}$, $Re_{\mathcal{V}}$ y $T_{2\bar{a}}$ obtenemos el friso F_6 . En la figura 2.22 se muestra un trozo del friso F_6 . Por la construcción, el subgrupo $G_6 = \langle Re_{\mathcal{V}}, Re_{\mathcal{L}}, T_{2\bar{a}} \rangle$ deja invariante a F_6 . Observemos que $Re_{\mathcal{V}}^2 = Id$, $Re_{\mathcal{V}} \circ T_{2\bar{a}} \circ Re_{\mathcal{V}} = T_{2\bar{a}}^{-1}$, $Re_{\mathcal{L}}^2 = Id$ y $(Re_{\mathcal{L}} \circ Re_{\mathcal{V}})^2 = \sigma_A^2 = Id$.

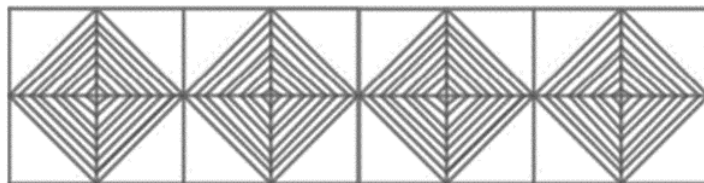


Figura 2.22: Trozo del friso F_6 .

En el friso F_6 hay centros de simetría en los puntos de la forma nA , donde $n \in \mathbb{Z}$. Además, en éste friso hay ejes de simetría, los cuáles son las rectas verticales a la recta \mathcal{L} , que pasan por los puntos de la forma nA con $n \in \mathbb{Z}$ y también la recta \mathcal{L} es eje de simetría. Véase figura 2.23.

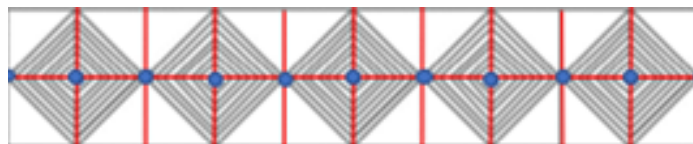


Figura 2.23: Centros y ejes de simetría del friso F_6 .

FRISO F_7

1) Tomamos el patrón F . Véase figura 2.2.

- 2) Se aplica a F una reflexión $Re_{\mathcal{V}}$. Véase figura 2.13.
- 3) A lo obtenido se le aplica una rotación σ_{2A} . Véase figura 2.24.

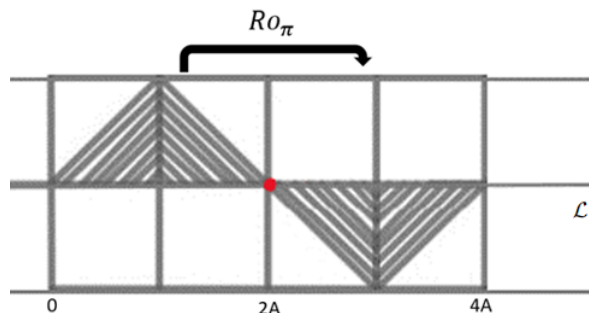


Figura 2.24: Rotación de 180° en torno al punto $2A$.

- 4) Aplicamos nuevamente una rotación σ_{2A} . Véase figura 2.25.

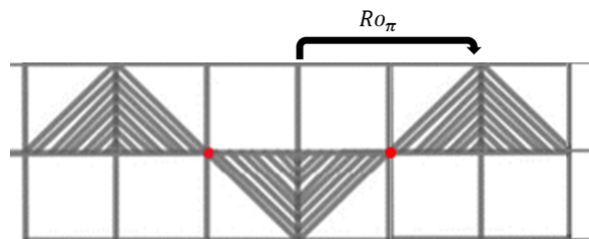


Figura 2.25: Rotación de 180° en torno al punto $2A$.

Al aplicar repetidamente $Re_{\mathcal{V}}$ y σ_{2A} obtenemos el friso F_7 . En la figura 2.26 se muestra un trozo del friso F_7 . Por la construcción, el subgrupo $G_7 = \langle Re_{\mathcal{V}}, \sigma_{2A} \rangle$ deja invariante a F_7 . Observemos que $(Re_{\mathcal{V}} \circ \sigma_{2A})^2 = T_{4\bar{a}}$.



Figura 2.26: Trozo del friso F_7 .

En el friso F_7 hay centros de simetría en los puntos de la forma nA , donde n es un número entero par. Además, en éste friso hay ejes de simetría, los cuáles son las rectas verticales a la recta \mathcal{L} , que pasan por los puntos de la forma nA donde n es un número entero impar. Véase figura 2.27.

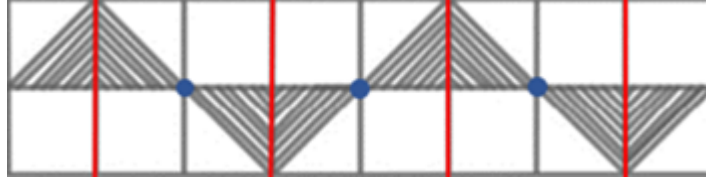


Figura 2.27: Ejes y centros de simetría del friso F_7 .

Proposición 2.1.8. *Cada uno de los siguientes pares de isometrías no pueden estar en un mismo grupo, ya que de lo contrario sucederán traslapaciones.*

- a) $T_{\bar{a}}$ y $Re_{\mathcal{V}}$.
- b) $\sigma_{\frac{1}{2}A}$ y $Re_{\mathcal{L}}$.
- c) σ_A y γ .

Demostración. Consideremos un patrón F , el cual puede ser el patrón de la notación 2.1.7. Así, comenzamos con:

- a) $T_{\bar{a}}$ y $Re_{\mathcal{V}}$.

Por un lado, tomamos a F y le aplicamos la traslación $T_{\bar{a}}$, entonces este se deslizará a un costado del patrón. Como se muestra en la figura 2.3.

Por otro lado, si le aplicamos a F la reflexión con respecto a la recta \mathcal{V} , entonces este se verá reflejado a un costado del patrón. Véase figura 2.13.

Ahora, notemos que las imágenes $T_{\bar{a}}(F)$ y $Re_{\mathcal{V}}(F)$ no coinciden, sin embargo, existe al menos un punto P digamos $P = 2A$ donde $T_{\bar{a}}(A) = 2A$ y $Re_{\mathcal{V}}(0) = 2A$, implicando que $P \in T_{\bar{a}}(F) \cap Re_{\mathcal{V}}(F)$, propiciando una traslación.

- b) $\sigma_{\frac{1}{2}A}$ y $Re_{\mathcal{L}}$.

Por un lado, si a F le aplicamos la rotación en torno al punto $\frac{1}{2}A$, σ_{rA} , con $r = \frac{1}{2}$, entonces este se rotará hacia la parte inferior del patrón. Como se muestra en la figura 2.5.

Por otro lado, tomamos a F y le aplicamos la reflexión con respecto a la recta \mathcal{L} , entonces este se verá reflejado en la parte inferior del patrón. Véase en la figura 2.9.

Ahora, notemos que las imágenes $Re_{\mathcal{L}}(F)$ y $\sigma_{\frac{1}{2}A}(F)$ no coinciden, sin embargo, ambas están en la parte inferior de la posición original del patrón F , más aún, existe al menos un punto P de hecho $P = A$, donde $Re_{\mathcal{L}}(A) = A$ y $\sigma_{\frac{1}{2}A}(0) = A$, implicando que $P \in Re_{\mathcal{L}}(F) \cap \sigma_{\frac{1}{2}A}(F)$, provocando una traslapación.

c) σ_A y γ .

Por un lado, le aplicamos a F la rotación en torno al punto A , σ_A , entonces este se rotará a un costado del patrón pero en la parte inferior. Como se muestra en la figura 2.28.

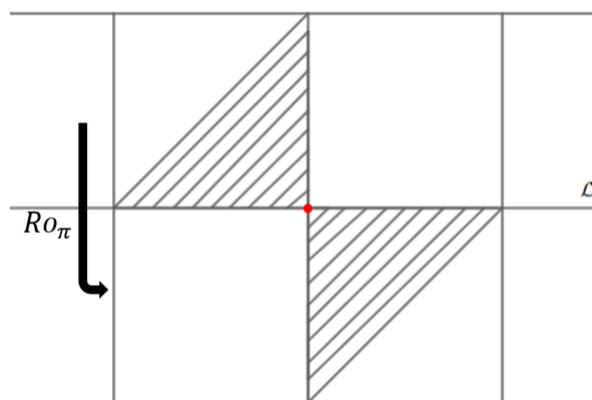


Figura 2.28: Rotación de 180° en torno al punto A .

Por otro lado, a F le aplicamos γ , entonces este se reflejará y trasladará al mismo tiempo hacia un costado del patrón pero en la parte inferior. Véase figura 2.17.

Ahora, notemos que las imágenes $\gamma(F)$ y $\sigma_A(F)$ no coinciden, pero ambas están a un costado de la posición original del patrón F pero en la parte inferior, además, $P = 2A$, donde $\gamma(A) = 2A$ y $\sigma_A(0) = 2A$, implica que $P \in \gamma(F) \cap \sigma_A(F)$, sucediendo una traslapación.

□

Proposición 2.1.9. *Los subgrupos de isometrías de $E(2)$ que fijan la recta \mathcal{L} y que cumplen las reglas 1 y 2 de la construcción 2.1.3, son únicamente G_i , $i = 1, 2, \dots, 7$.*

Demostración. Consideremos las isometrías las cuales dejan invariante la recta \mathcal{L} del plano y cumplen la regla de utilizar una vez el patrón en cada tramo

de longitud a . Ahora procedemos a generar los grupos posibles con éstas isometrías, para lo cual consideramos las siguientes posibilidades:

1) Si consideramos una isometría que mantiene la base del patrón F en \mathcal{L} y que realice desplazamientos en la recta, entonces esta es $T_{\bar{a}}$ y genera el grupo G_1 .

2) Si consideramos dos isometrías que mantienen la base del patrón F en \mathcal{L} , que además una de ellas causa desplazamientos en \mathcal{L} y la otra rotaciones en puntos de \mathcal{L} de la forma rA , donde $r = \frac{1}{2}$, entonces estas isometrías son $T_{\bar{a}}$ y σ_{rA} las cuales generan al grupo G_2 .

3) Si consideramos dos isometrías que mantienen la base del patrón F en \mathcal{L} , que además una de ellas causa desplazamientos en \mathcal{L} y la otra reflexiones con respecto a \mathcal{L} , entonces estas isometrías son $T_{\bar{a}}$ y $Re_{\mathcal{L}}$ las cuales generan al grupo G_3 .

4) Si consideramos dos isometrías que mantiene la base del patrón F en \mathcal{L} , que además una de ellas causa desplazamientos en \mathcal{L} y la otra reflexiones con respecto a la recta \mathcal{V} (recordemos que \mathcal{V} es la recta perpendicular a la recta \mathcal{L} , véase la notación 2.1.7), entonces estas isometrías son $T_{2\bar{a}}$ y $Re_{\mathcal{V}}$ las cuales generan al grupo G_4 . Nótese que por la proposición 2.1.8, las isometrías $T_{\bar{a}}$ y $Re_{\mathcal{V}}$ no generan un grupo.

5) Si consideramos una isometría que mantiene la base del patrón F en \mathcal{L} y que realice el paso en la recta \mathcal{L} , entonces esta es γ y genera el grupo G_5 .

6) Si consideramos dos isometrías que mantiene la base del patrón F en \mathcal{L} , que además una de ellas causa rotaciones en los puntos de \mathcal{L} de la forma nA , con n un número entero, y la otra reflexiones con respecto a \mathcal{L} , entonces estas isometrías son σ_A y $Re_{\mathcal{L}}$, sin embargo, como son involuciones (su cuadrado es la identidad) estas nos permiten obtener sólo un trozo de friso. Así, en éste caso es necesario agregar la traslación $T_{2\bar{a}}$. Por lo que generamos el grupo G_6 .

7) Si consideramos dos isometrías que mantienen la base del patrón F en \mathcal{L} , que además una de ellas causa rotaciones en \mathcal{L} y la otra reflexiones con respecto a la recta \mathcal{V} , entonces estas isometrías son σ_{rA} y $Re_{\mathcal{V}}$ las cuales generan al grupo G_7 . Notemos que si consideramos a σ_{rA} , $Re_{\mathcal{V}}$ y $T_{2\bar{a}}$ obtenemos el mismo grupo.

8) Si consideramos dos isometrías que mantienen la base del patrón F en \mathcal{L} , que además una de ellas causa rotaciones en los puntos de \mathcal{L} de la forma rA , donde $r = \frac{1}{2}$, y la otra el paso en \mathcal{L} , entonces estas isometrías son σ_{rA} y γ , (notesé que para no tener superposiciones, es necesario que la recta \mathcal{V} sea eje de simetría). Así, estas isometrías generan al grupo G_7 . Notesé que si consideramos a γ , $T_{2\bar{a}}$ y σ_{rA} , donde $r = \frac{1}{2}$, se obtiene el mismo grupo.

- 9) Si consideramos dos isometrías que mantiene la base del patrón F en \mathcal{L} , que además una de ellas causa reflexiones con respecto a la recta \mathcal{L} y la otra reflexiones con respecto a la recta \mathcal{V} , entonces esta isometrías son $Re_{\mathcal{L}}$ y $Re_{\mathcal{V}}$, sin embargo, como son involuciones estas nos permiten obtener sólo un trozo de friso. Así, en éste caso es necesario agregar la traslación $T_{2\bar{a}}$. Por lo que el grupo que generan estas isometrías es G_6 .
- 10) Si consideramos dos isometrías que mantienen la base del patrón F en \mathcal{L} , que además una de ellas causa reflexiones con respecto a la recta \mathcal{L} y la otra el paso en \mathcal{L} , entonces estas isometrías son $Re_{\mathcal{L}}$ y γ , las cuales generan al grupo G_3 . Nótese que si consideramos a γ , $Re_{\mathcal{L}}$ y $T_{\bar{a}}$ se obtiene el mismo grupo.
- 11) Si consideramos dos isometrías que mantienen la base del patrón F en \mathcal{L} , tales que una de ellas causa reflexiones con respecto a la recta \mathcal{V} y la otra el paso en \mathcal{L} , entonces estas isometrías son $Re_{\mathcal{V}}$ y γ , las cuales generan al grupo G_7 . Nótese que si consideramos a γ , $Re_{\mathcal{V}}$ y $T_{2\bar{a}}$ obtenemos el mismo grupo.
- 12) Si consideramos dos isometrías que mantienen la base del patrón F en \mathcal{L} , que además una de ellas causa desplazamientos en \mathcal{L} y la otra el paso en \mathcal{L} , entonces estas isometrías son $T_{2\bar{a}}$ y γ las cuales generan al grupo G_5 .
- 13) Si consideramos tres isometrías que mantienen la base del patrón F en \mathcal{L} , tales que una de ellas causa rotaciones en \mathcal{L} , la otra reflexiones con respecto a la recta \mathcal{L} y la tercera reflexiones con respecto a la recta \mathcal{V} , entonces estas isometrías son σ_A , $Re_{\mathcal{L}}$ y $Re_{\mathcal{V}}$ las cuales generan al grupo G_6 . Nótese que si consideramos las isometrías $T_{2\bar{a}}$, σ_A , $Re_{\mathcal{L}}$ y $Re_{\mathcal{V}}$ se obtiene el mismo grupo.
- 14) Si consideramos tres isometrías que mantienen la base del patrón F en \mathcal{L} , tales que una de ellas causa rotaciones en \mathcal{L} , la otra reflexiones con respecto a la recta \mathcal{L} y la última el paso en \mathcal{L} , entonces estas isometrías son σ_{rA} , $Re_{\mathcal{L}}$ y γ , sin embargo, por la proposición 2.1.8 estas no generan un grupo. Nótese que si consideramos a $T_{2\bar{a}}$, σ_A , $Re_{\mathcal{L}}$ y γ no se sigue generando un grupo. Por lo que estas posibilidades no se pueden dar.
- 15) Si consideramos tres isometrías que mantienen la base del patrón F en \mathcal{L} , que además una de ellas causa rotaciones en \mathcal{L} , la otra reflexiones con respecto a la recta \mathcal{V} y la tercera el paso en \mathcal{L} , entonces estas isometrías son $\sigma_{\frac{1}{2}A}$, $Re_{\mathcal{V}}$ y γ las cuales generan al grupo G_7 . Notesé que si consideramos a $T_{2\bar{a}}$, $\sigma_{\frac{1}{2}A}$, $Re_{\mathcal{V}}$ y γ obtenemos el mismo grupo.
- 16) Si consideramos tres isometrías que mantienen la base del patrón F en \mathcal{L} , tales que una de ellas causa reflexiones con respecto a la recta \mathcal{L} , la otra

reflexiones con respecto a la recta \mathcal{V} y la última el paso en \mathcal{L} , entonces estas isometrías son $Re_{\mathcal{L}}$, $Re_{\mathcal{V}}$ y γ , sin embargo, al hacer la composición entre $Re_{\mathcal{V}}$ y γ implica $\sigma_{\frac{1}{2}A}$, por la proposición 2.1.8 no generan un grupo. Más aún, si consideramos las isometrías $T_{2\bar{a}}$, $Re_{\mathcal{L}}$, $Re_{\mathcal{V}}$ y γ no se sigue generando un grupo. Por lo que estas posibilidades no se pueden dar.

17) Si consideramos cuatro isometrías que mantienen la base del patrón F en \mathcal{L} , que además una de ellas causa rotaciones en \mathcal{L} , otra reflexiones con respecto a la recta \mathcal{L} , una tercera reflexiones con respecto a la recta \mathcal{V} y la última el paso en \mathcal{L} , entonces estas isometrías son σ_{rA} , $Re_{\mathcal{L}}$, $Re_{\mathcal{V}}$ y γ , sin embargo, por la proposición 2.1.8 no generan un grupo. Por lo que esta posibilidad no se puede dar.

18) Si consideramos cinco isometrías que mantienen la base del patrón F en \mathcal{L} , tales que una de ellas causa desplazamientos en \mathcal{L} , la segunda rotaciones en \mathcal{L} , la tercera reflexiones con respecto a la recta \mathcal{L} , la cuarta reflexiones con respecto a la recta \mathcal{V} y la quinta el paso en \mathcal{L} , entonces estas isometrías son $T_{2\bar{a}}$, σ_{rA} , $Re_{\mathcal{L}}$, $Re_{\mathcal{V}}$ y γ , sin embargo, por la proposición 2.1.8 no generan un grupo. Por lo que esta posibilidad no se puede dar. \square

De la proposición anterior se sigue el siguiente resultado.

Corolario 2.1.10. *El grupo de isometrías de un friso consta de los elementos de $E(2)$ que fijan una recta y contiene un subgrupo de traslaciones.*

Definición 2.1.11. *Un dominio fundamental o región fundamental es el trozo de friso, que al trasladarse por los elementos del subgrupo de traslaciones incluido en el grupo que lo fija, permiten obtener el friso completo. Véanse figuras 2.29 y 2.30.*



Figura 2.29: Región fundamental del friso 1.

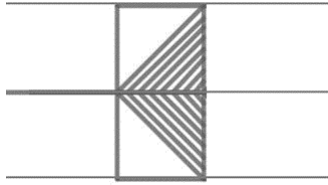


Figura 2.30: Región fundamental del friso 3.

2.2. Mosaicos

En la sección anterior trabajamos con sólo una región del plano, donde los frisos son los posibles recubrimientos, pero ahora es necesario poder llevar ésta idea a algo más general, es decir, a los posibles recubrimientos del plano \mathbb{R}^2 . Es de esta idea que surgen los mosaicos, a los cuales les dedicamos esta segunda parte del capítulo. Los conceptos y resultados aquí plasmados se pueden consultar en [1, 2 Planar Patterns, pág. 15].

Definición 2.2.1. *En el lenguaje coloquial se llama **mosaicos** a las piezas utilizadas para recubrir el piso, pero en matemáticas se llama **mosaico** al modelo completo formado sobre el piso con las piezas. Véase figura 2.31.*

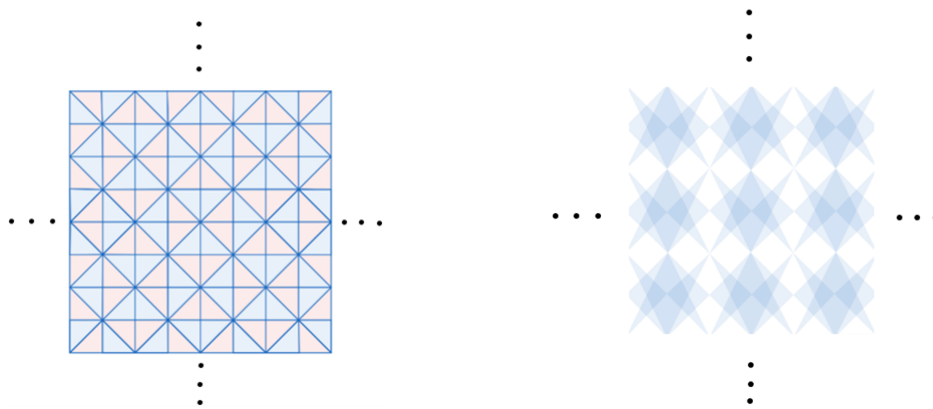


Figura 2.31: Ejemplos de mosaicos.

Definición 2.2.2. *Un dominio fundamental o región fundamental es el trozo de mosaico, que al aplicarle un subgrupo de isometrías, permite obtener el mosaico completo. Véase figura 2.32.*



Figura 2.32: Región fundamental.

Definición 2.2.3. *Cada isometría de una región fundamental puede ser denotada por un sólo símbolo, llamamos **signatura** a todos los símbolos que describen un dominio fundamental.*

Definición 2.2.4. *Una línea trazada en un mosaico, la cual divide a éste en dos, que además permite que un lado sea simétrico al otro, es llamada **línea espejo** (eje de simetría). La denotamos con el símbolo *****. Véase figura 2.33.*

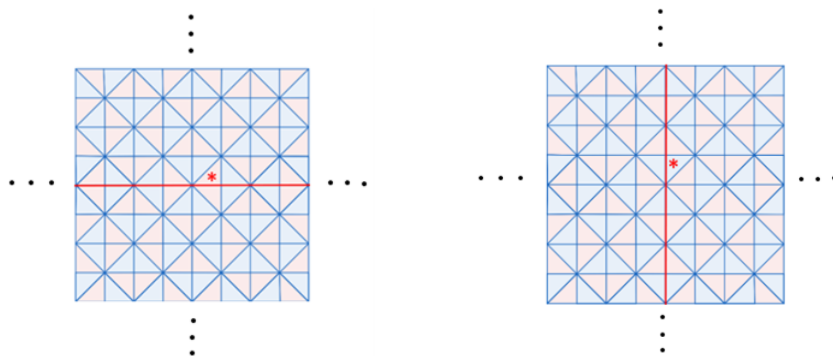


Figura 2.33: Líneas espejo.

Cuando consideremos una línea espejo, la reflexión es la isometría con la que estaremos trabajando, donde la línea espejo es la recta de reflexión considerada en la definición 1.2.18.

Definición 2.2.5. Al punto de intersección de las líneas espejo, le llamamos *punto caleidoscópico*. A éste punto lo denotamos por el símbolo $*n$, donde n es el número de líneas espejo que pasan por ese punto. Véase figura 2.34.

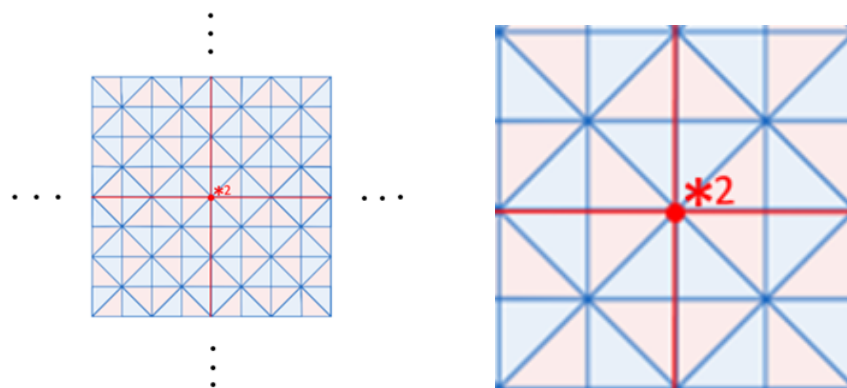


Figura 2.34: Punto caleidoscópico.

Observación 2.2.6. En un mosaico pueden existir puntos caleidoscópicos con la misma cantidad de líneas espejo que pasan por ellos, pero nótese que son distintos, ésto se debe a que suelen ser puntos distintos en una región fundamental. Cuando esto sucede se ponen los símbolos en la signatura por separado. Véase figura 2.35.

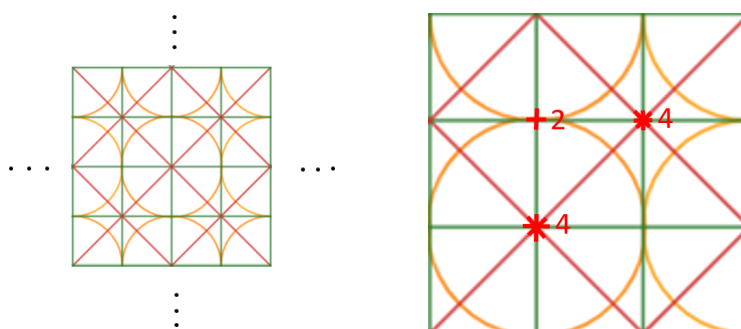


Figura 2.35: Puntos caleidoscópicos distintos.

Observación 2.2.7. *En un mosaico pueden existir puntos caleidoscópicos con la misma cantidad de líneas espejo que pasan por ellos, pero nótese que son iguales, ésto se debe a que suelen ser el mismo punto en las diferentes elecciones de la región fundamental. Cuando esto sucede se coloca un sólo símbolo en la signatura. Véase figura 2.36.*

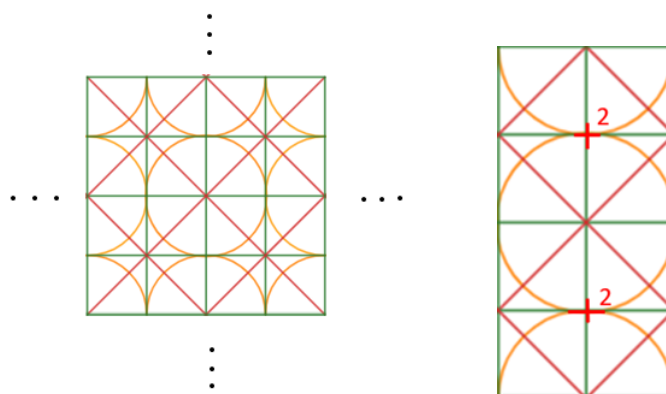


Figura 2.36: Mismos puntos caleidoscópicos.

Observación 2.2.8. *Los números que componen una signatura pueden ser permutados, por ejemplo, *442, *244, *424 definen la misma signatura. Véase figura 2.37.*

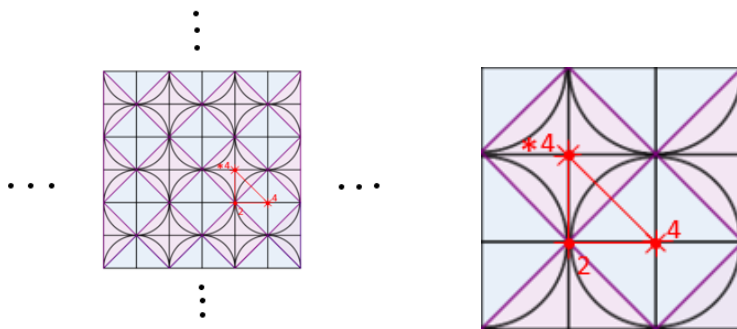


Figura 2.37: Mosaico con signatura *442, *244, *424.

Definición 2.2.9. Un **punto de giro** o **n centro** es un punto O del mosaico, que es centro de una rotación por un ángulo $\frac{2\pi}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$, la cual deja invariante al mosaico. A éste punto lo denotamos por el símbolo n , donde n es la cantidad de veces que podemos rotar el mosaico, hasta llegar a la posición original. Véase figuras 2.38 y 2.39.

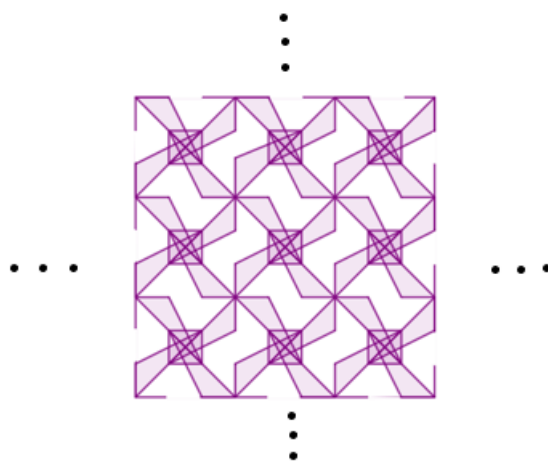


Figura 2.38: Mosaico.

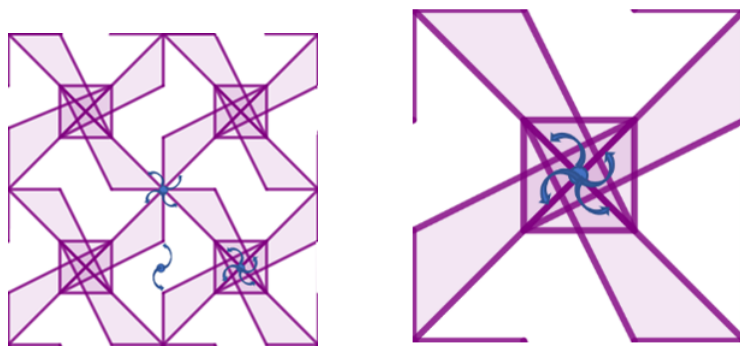


Figura 2.39: Puntos de giro en trozos de mosaico.

Cuando tengamos un punto de giro, la rotación es la isometría con la que

estaremos trabajando, donde el punto de giro es el punto fijo considerado en la definición 1.2.11.

Definición 2.2.10. Un *milagro* es una repetición a través de la reflexión de una región fundamental de un mosaico la cuál no es explicada por una línea espejo. A un milagro, lo denotamos por el símbolo \times . Véase figura 2.40.

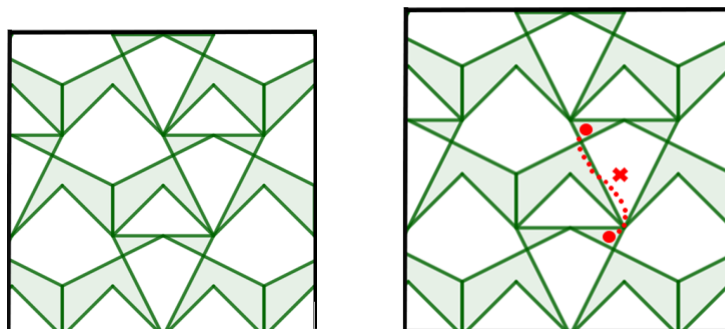


Figura 2.40: Milagro en trozos de mosaico.

Definición 2.2.11. Un *sendero maravilloso* es la repetición de una región fundamental de un mosaico la cuál no es explicada por una rotación, reflexión o milagro. A un sendero maravilloso, lo denotamos por el símbolo \circ , en la literatura a este símbolo se le conoce como anillo maravilloso. Véase figura 2.41.

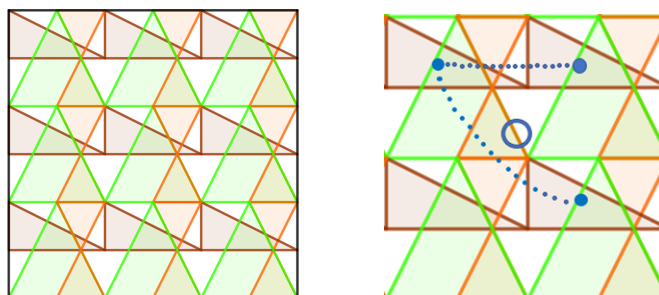


Figura 2.41: Sendero maravilloso en trozos de mosaico.

Definición 2.2.12. El *costo* es el valor que se le otorga a cada uno de los símbolos que determinan una *signatura*. El cual está dado de la siguiente manera:

- \circ tiene costo \$1.
- $*$ tiene costo \$1.
- \times tiene costo \$1.
- n su costo es $\$\frac{n-1}{n}$, (donde representa puntos de giro).
- n su costo es $\$\frac{n-1}{2n}$, (donde representa puntos caleidoscópicos).

2.2.1. Patrones planos

Los mosaicos se pueden estudiar en superficies distintas, sin embargo, según la superficie en la que se trabajen estos tendrán características distintas o incluso una cantidad menor de ellos. Es por ello, que en esta ocasión estudiamos a los mosaicos en el plano \mathbb{R}^2 .

Definición 2.2.13. A los mosaicos que usemos para recubrir el plano, los llamaremos *patrones planos*.

Teorema 2.2.14. (El Teorema Mágico para patrones planos.)

Las *signaturas* de los patrones repetitivos planos son precisamente aquellos cuyo costo total es \$2.

Debido a la complejidad de la demostración del teorema 2.2.14, omitiremos su prueba, pero esta se puede encontrar en [1, 6 Why the Magic Theorems Work, pág. 78]. Es importante comentar que el Teorema Mágico para patrones planos es un caso particular del Teorema Mágico para patrones esféricos.

A continuación, desarrollaremos 3 ejemplos donde se involucran los costos y ejemplifica el teorema 2.2.14.

Ejemplo 2.2.15. Sea M un mosaico, cuya región fundamental se puede ver en la figura 2.42.

Notemos que tiene *signatura* $*244$. Por la definición 2.2.12 tenemos que su costo es $\$*244 = \$1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \2 . Entonces, por el teorema 2.2.14, $*244$ es la *signatura* de un patrón plano.

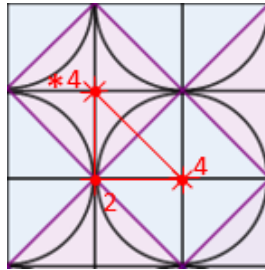


Figura 2.42: Trozo de mosaico con signatura $*244$.

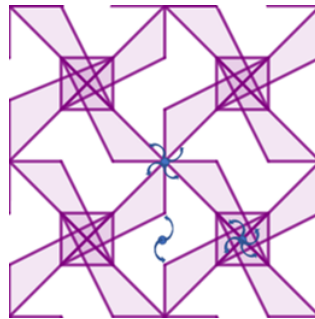


Figura 2.43: Trozo de mosaico con signatura 244 .

Ejemplo 2.2.16. Sea M un mosaico, cuya región fundamental se puede ver en la figura 2.43.

Notemos que tiene signatura 244 . Por la definición 2.2.12 tenemos que su costo es $\$244 = \$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \2 . Entonces, por el teorema 2.2.14, 244 es la signatura de un patrón plano.

Ejemplo 2.2.17. Sea M un mosaico, cuya región fundamental se puede ver en la figura 2.44.

Notemos que tiene signatura \circ . Por la definición 2.2.12 tenemos que su costo es $\$\circ = \2 . Entonces, por el teorema 2.2.14, \circ es la signatura de un patrón plano.

Considerando el teorema 2.2.14 describiremos las posibles signaturas para patrones planos, en términos de sus costos. Las cuales se dividen en tres categorías: azul verdadero, rojo reflectante e híbridos.

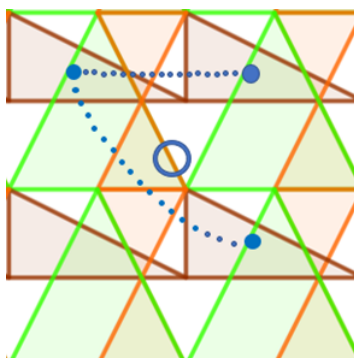


Figura 2.44: Trozo de mosaico con signatura \circ .

“Patrones planos azul verdadero”

Ya que los costos de los símbolos (de los puntos de giro) son menores a \$1, necesitamos de al menos tres símbolos que conformen la signatura. Si hay exactamente tres símbolos, los costos de la definición 2.2.12 demuestran que la signatura puede ser sólo de las siguientes:

- La signatura 632 que describe un mosaico que tiene un 6 centro, 3 centro y 2 centro, véase figura 2.45, tiene un costo de $\$ \frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \2 .

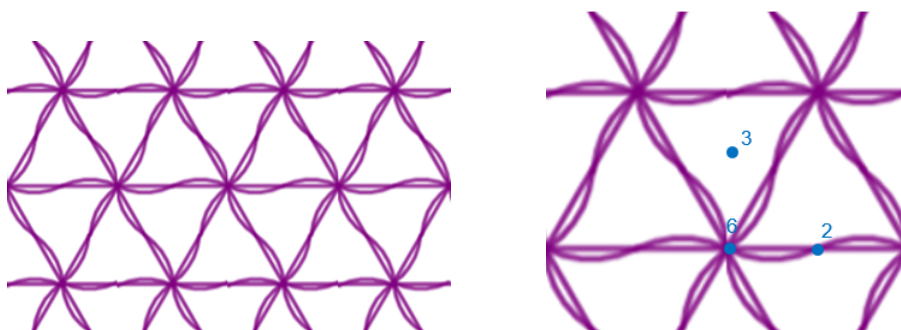


Figura 2.45: Trozos de mosaico con signatura 632 .

- La signatura 442 que describe un mosaico que tiene dos 4 centro distintos, un 2 centro, véase figura 2.46, tiene un costo de $\$ \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \2 .

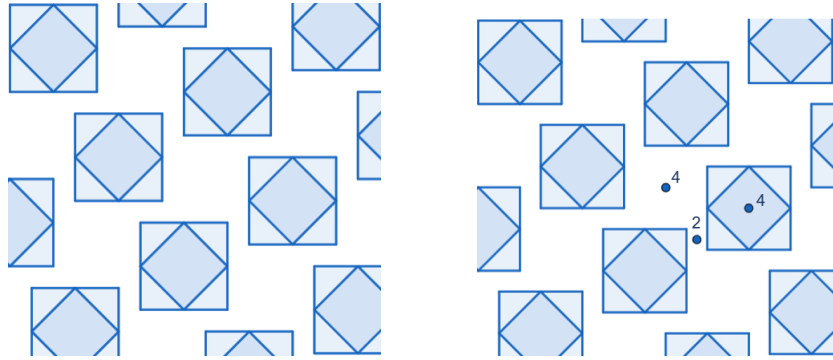


Figura 2.46: Trozos de mosaico con signatura 442.

- La signatura 333 que describe un mosaico que tiene tres 3 centro distintos, véase figura 2.47, tiene un costo de $\$ \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \2 .

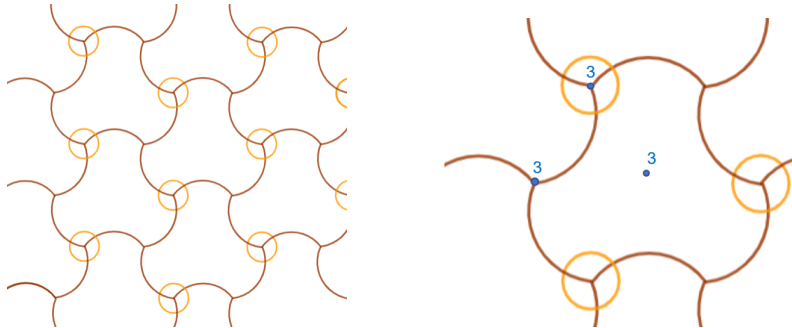


Figura 2.47: Trozos de mosaico con signatura 333.

Ahora, si quisieramos una signatura con exactamente cuatro símbolos, la que se muestra a continuación es la única que cumple la condición inicial.

- La signatura 2222 que describe un mosaico que tiene cuatro 2 centro, véase figura 2.48, tiene un costo de $\$ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \2 .

Además, la signatura del sendero maravilloso se encuentra en ésta categoría.

- La signatura \circ describe un mosaico que tiene un sendero maravilloso, véase figura 2.49, tiene un costo de $\$2$.

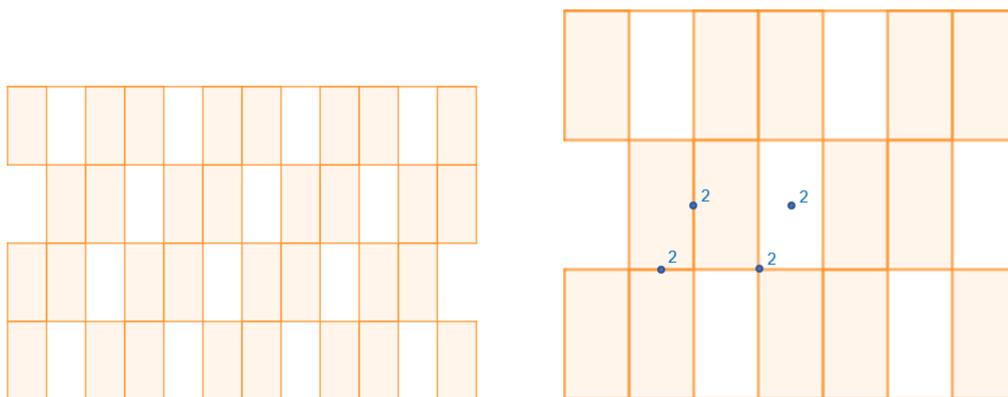


Figura 2.48: Trozos de mosaico con signatura 2222.

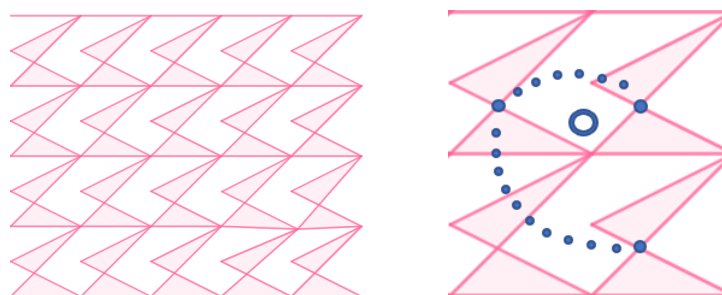


Figura 2.49: Trozos de mosaico con signatura o.

“Patrones planos rojo reflectante”

Consideremos las signaturas que no tienen milagros y son completamente rojas. Pues estas se obtienen de los casos anteriores, ya que $*AB \cdots N$ tiene costo $\$2$ si y sólo si $AB \cdots N$ cumple:

$$\$1 + \frac{A-1}{2A} + \cdots + \frac{N-1}{2N} = \$2 \text{ si y sólo si } \$\frac{A-1}{A} + \cdots + \frac{N-1}{N} = \$2$$

recalcando que la única signatura (descrita por solo líneas espejo distintas) que cumple la condición inicial es $**$.

Debido a que cada costo de un símbolo rojo es la mitad del costo de un símbolo azul y el costo de $*$ es la mitad de $\$2$, tenemos las siguientes signaturas:

- La signatura $*632$ que describe un mosaico que tiene un punto calei-

doscópico *6, un punto caleidoscópico *3 y un punto caleidoscópico *2, correspondiente a 632, véase figura 2.50, tiene un costo de $\$1 + \frac{5}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \2 .

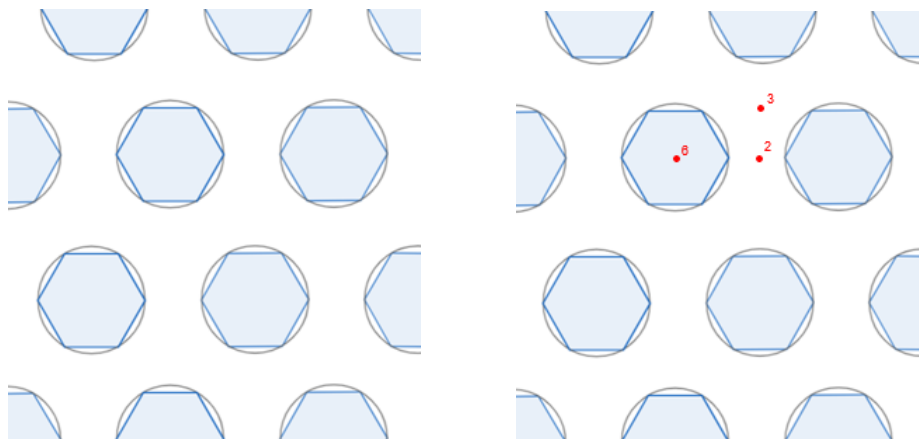


Figura 2.50: Trozos de mosaico con signatura *632.

- La signatura *442 que describe un mosaico que tiene un punto caleidoscópico *2 y dos puntos caleidoscópicos *4, correspondiente a 442, véase figura 2.51, tiene un costo de $\$1 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \2 .

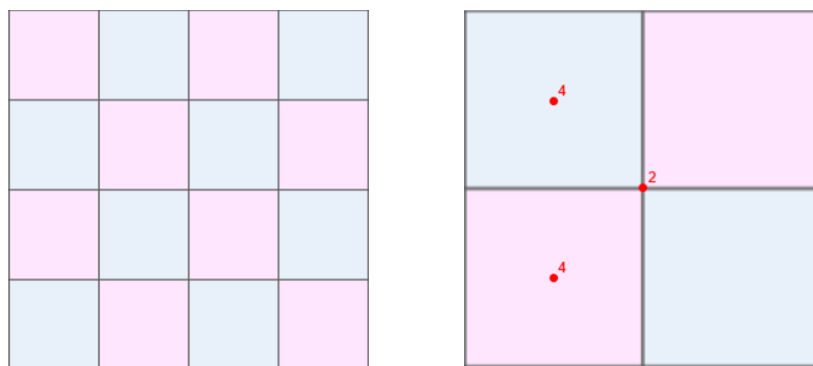


Figura 2.51: Trozos de mosaico con signatura *442.

- La signatura *333 que describe un mosaico que tiene tres puntos caleidoscópicos *3, correspondiente a 333, véase figura 2.52, tiene un costo

de $\$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \2 .

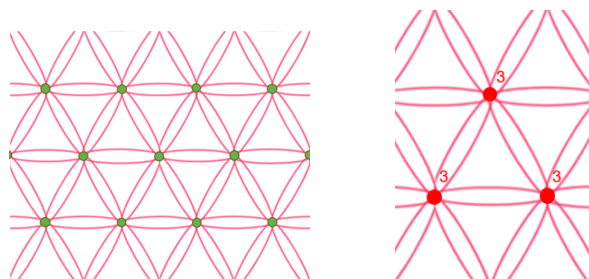


Figura 2.52: Trozos de mosaico con signatura $*333$.

- La signatura $*2222$ que describe un mosaico que tiene cuatro puntos caleidosc3picos $*2$, correspondiente a 2222 , véanse figuras 2.53 y 2.54, tiene un costo de $\$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \2 .

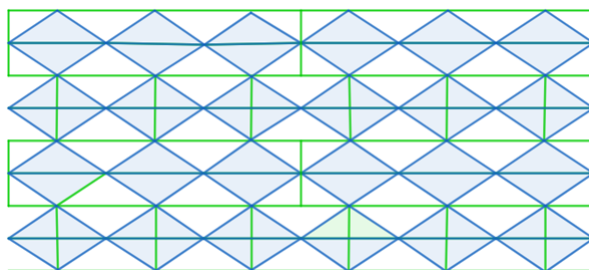


Figura 2.53: Trozo de mosaico con signatura $*2222$.

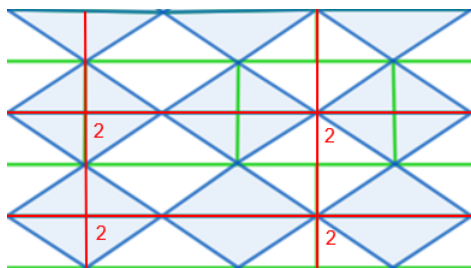


Figura 2.54: Trozo de mosaico con signatura $*2222$.

- La signatura $**$ que describe un mosaico que tiene dos líneas espejo $*$ distintas, correspondiente a \circ , véase figura 2.55, tiene un costo de $\$1 + 1 = \2 .

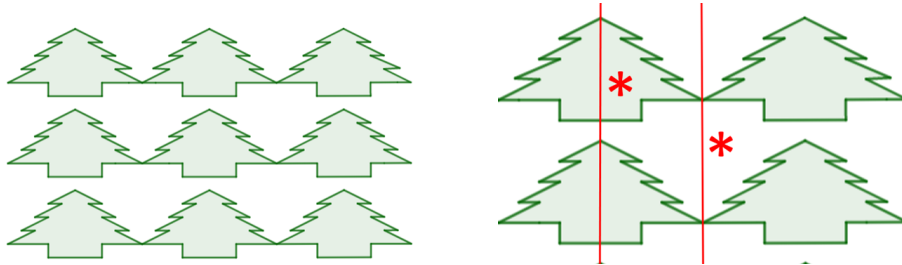


Figura 2.55: Trozos de mosaico con signatura $**$.

”Patrones planos híbridos”

Consideremos las signaturas que tienen milagros, para ello realicemos los correspondientes reemplazos en las signaturas completamente rojas, $n*$ por $*nn$ y $*$ por \times . Así, las signaturas obtenidas son:

- La signatura $4*2$ que describe un mosaico que tiene un 4 centro y un punto caleidoscópico $*2$, correspondiente a $*442$, véase figura 2.56, tiene un costo de $\$ \frac{3}{4} + 1 + \frac{1}{4} = \2 .

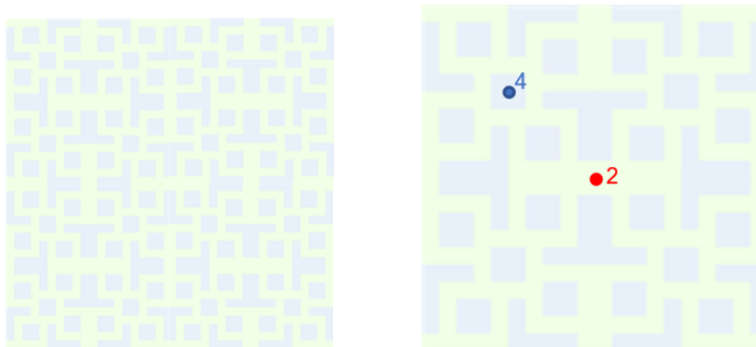


Figura 2.56: Trozos de mosaico con signatura $4*2$.

- La signatura $3*3$ que describe un mosaico que tiene un 3 centro y un punto caleidoscópico $*3$, correspondiente a $*333$, véase figura 2.57, tiene un costo de $\$ \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{3} = \2 .

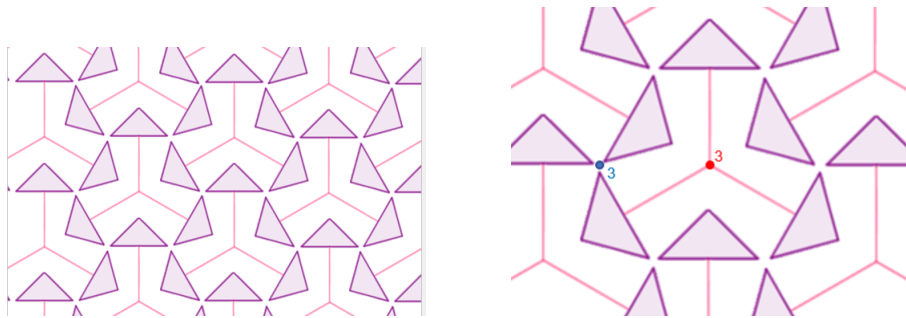


Figura 2.57: Trozos de mosaico con signatura $3*3$.

- La signatura $2*22$ que describe un mosaico que tiene un 2 centro y dos puntos caleidoscópicos $*2$, correspondiente a $*2222$, véanse figuras 2.58 y 2.59, tiene un costo de $\$ \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \2 .

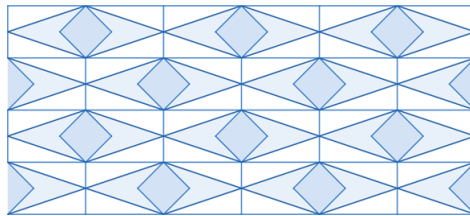


Figura 2.58: Trozo de mosaico con signatura $2*22$.

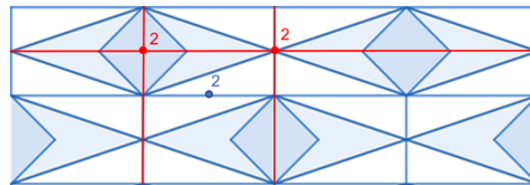


Figura 2.59: Trozo de mosaico con signatura $2*22$.

- La signatura $22*$ que describe un mosaico que tiene dos 2 centro y una línea espejo $*$, correspondiente a $*2222$, véanse figuras 2.60 y 2.61, tiene un costo de $\$ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \2 .

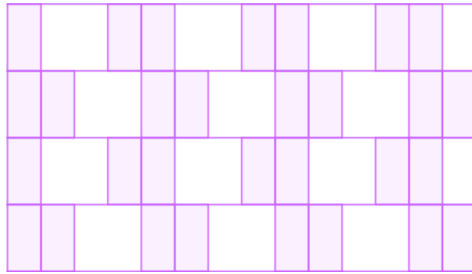


Figura 2.60: Trozo de mosaico con signatura 22^* .

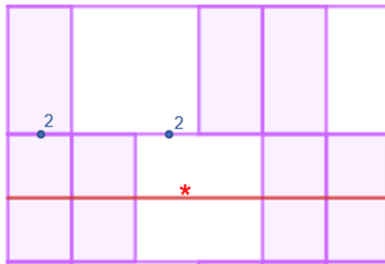


Figura 2.61: Trozo de mosaico con signatura 22^* .

- La signatura $22 \times$ que describe un mosaico que tiene dos 2 centro distintos y un milagro \times , correspondiente a $*2222$, véase figura 2.62, tiene un costo de $\$ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \2 .

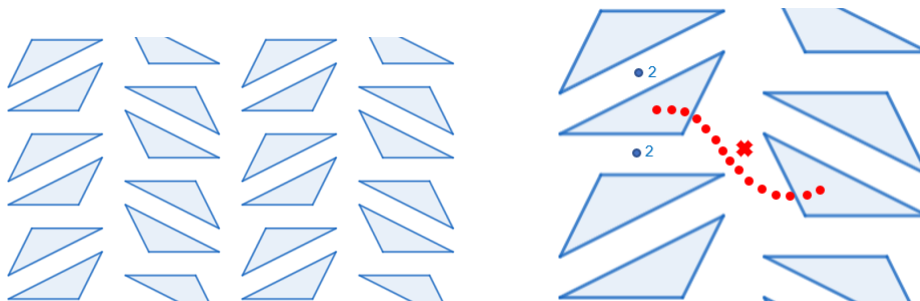


Figura 2.62: Trozos de mosaico con signatura $22 \times$.

- La signatura $*\times$ que describe un mosaico que tiene una línea espejo $*$ y un milagro \times , correspondiente a $**$, véase figura 2.63, tiene un costo de $\$1 + 1 = \2 .

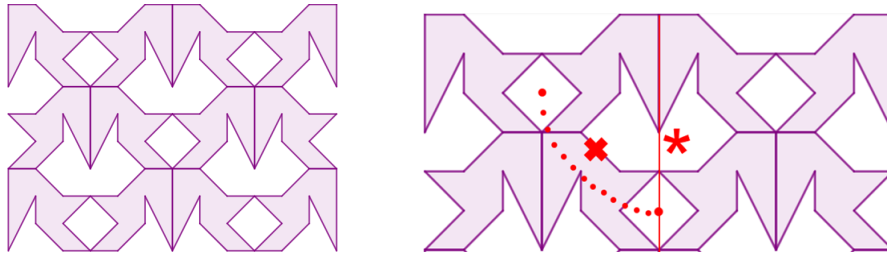


Figura 2.63: Trozos de mosaico con signatura $*\times$.

- La signatura $\times\times$ que describe un mosaico que tiene dos milagros \times distintos, correspondiente a $**$, véase figura 2.64, tiene un costo de $\$1 + 1 = \2 .

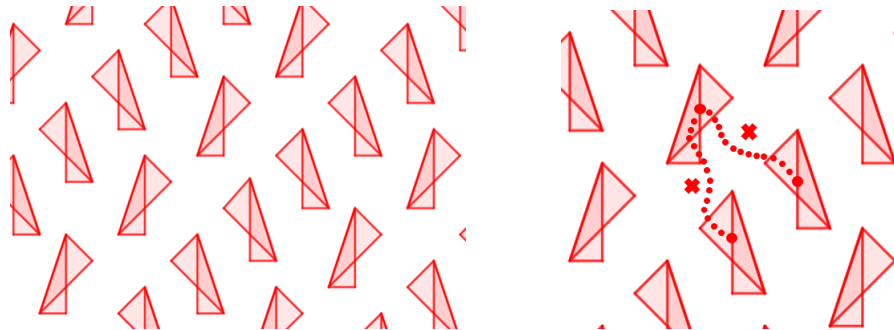


Figura 2.64: Trozos de mosaico $\times\times$.

Por lo tanto, el teorema 2.2.14 implica que hay como máximo 17 tipos de signaturas para un patrón plano.

Problema 1. *Sea un mosaico en el plano, encuentra su signatura.*

Para finalizar aquí damos unos tips para poder encontrarla.

- Se comienza por tomar un trozo de mosaico, identificar y remarcar con el

color y símbolo correspondientes a los siguientes:

- a) Líneas espejo.
- b) Puntos caleidoscópicos.
- c) Puntos de giro.
- d) Milagros.
- e) Senderos maravillosos.

2) Se identifica y analiza la región fundamental del mosaico.

3) Se desarrolla la signatura escribiendo los símbolos correspondientes a las isometrías que describen a la región fundamental analizada.

4) Se verifica que efectivamente es la signatura conforme al trozo del mosaico, calculando el costo total por medio de los costos de los símbolos que componen a la signatura, que además, coincida en ser \$2.

2.2.2. Teselaciones

Los frisos y mosaicos están inmersos en nuestra vida cotidiana, sin embargo, no siempre los percibimos, esto se debe a que en ocasiones no prestamos la atención adecuada a las cosas, gracias al ritmo de vida que llevamos. Recalcando que hemos olvidado apreciar los pequeños detalles de todo lo que nos rodea.

Definición 2.2.18. *Una **teselación**, (mosaico), es un conjunto de figuras planas que cubren el plano, de manera que no queden espacios sin cubrir y sin que las figuras se sobrepongan (traslapan) unas con otras.*

Definición 2.2.19. *Un **motivo o tesela**, es con lo que se cubre el plano, (figura).*

Para finalizar este trabajo mostramos algunas imágenes de los mosaicos se encuentran aplicados en todo tipo de cosas en nuestra vida cotidiana:

Ejemplo 2.2.20. *En esta figura podemos apreciar al mosaico generado por las losetas o azulejos de un baño.*



Figura 2.65: Losetas que conforman la decoración de la pared de un baño.

Ejemplo 2.2.21. *En la siguiente ilustración podemos observar el mosaico generado por las losetas del piso de una habitación.*

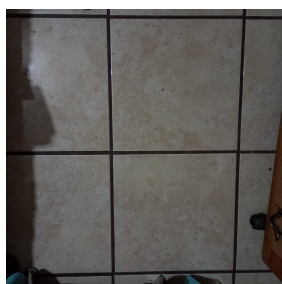


Figura 2.66: Losetas que componen el mosaico del piso de una habitación.

Ejemplo 2.2.22. *En la figura podemos apreciar el mosaico que da lugar al diseño de esta cortina de una habitación.*



Figura 2.67: Diseño de una cortina de una habitación.

Ejemplo 2.2.23. *En la ilustración podemos visualizar el mosaico que forma parte de la decoración de una pared.*



Figura 2.68: Decoración de una pared.

Ejemplo 2.2.24. *En un negocio, podemos observar el mosaico que constituye el diseño del mantel de una mesa.*

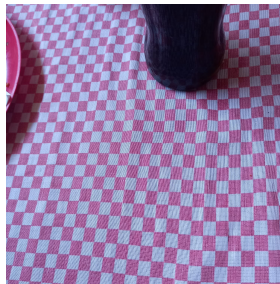


Figura 2.69: Mosaico en un mantel de mesa.

Ejemplo 2.2.25. *En una casa, podemos apreciar el mosaico conformado por los tabiques al momento de la construcción.*



Figura 2.70: Mosaico en una pared en construcción.

Ejemplo 2.2.26. *En una prenda de ropa, podemos ver el mosaico que da lugar a su diseño.*



Figura 2.71: Diseño de una prenda.

Ejemplo 2.2.27. *En un regalo, podemos observar el mosaico que constituye el papel con el que lo envolvemos.*



Figura 2.72: Mosaico en un papel para regalo.

Ejemplo 2.2.28. *En esta figura podemos observar un mosaico inmerso en la plantilla de una lona.*



Figura 2.73: Mosaico inmerso en una lona.

Ejemplo 2.2.29. *En la siguiente ilustración podemos apreciar el mosaico que da lugar al diseño de una cortina.*



Figura 2.74: Diseño de una cortina.

Ejemplo 2.2.30. *En una florería, podemos ver el mosaico que conforma el diseño del papel con el que se envuelven los ramos de rosas.*



Figura 2.75: Mosaico de un pliego de papel.

Ejemplo 2.2.31. *En la figura se puede apreciar un mosaico que constituye parte de la tapa de caja para algún regalo.*



Figura 2.76: Mosaico introducido en la tapa de una caja.

Ejemplo 2.2.32. *En la siguiente ilustración se puede observar un mosaico que forma parte de la base de caja para algún regalo.*



Figura 2.77: Mosaico inmerso en la base de una caja.

Ejemplo 2.2.33. *En una mercería, podemos ver el mosaico que constituye el diseño del papel con el que se forran los cuadernos de los estudiantes.*



Figura 2.78: Mosaico en un pliego de papel.

Ejemplo 2.2.34. *En el arte, podemos apreciar la belleza de un mosaico inmerso en una de las obras de M. C. Escher.*

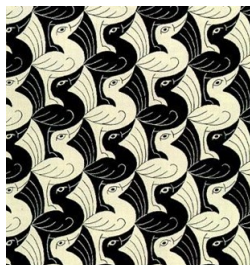


Figura 2.79: Obra de M. C. Escher.

Ejemplo 2.2.35. *En la figura, podemos visualizar a un mosaico generado por una región fundamental en una de las obras de M. C. Escher.*



Figura 2.80: Obra de M. C. Escher.

Ejemplo 2.2.36. *En el arte, podemos apreciar la naturalidad de un mosaico introducido en una de las obras de Holland.*



Figura 2.81: Obra de Holland.

Ejemplo 2.2.37. *En una casa, podemos observar a un friso que da lugar al diseño de una cenefa de un baño.*



Figura 2.82: Cenefa de un baño.

Ejemplo 2.2.38. *En la arquitectura, podemos observar los hermosos frisos que forman parte del diseño de una construcción.*



Figura 2.83: Frisos inmersos en una construcción.

Ejemplo 2.2.39. *En una brillante pared, podemos notar la presencia de los lindos frisos que forman parte de una construcción.*



Figura 2.84: Frisos construidos en una pared.

Bibliografía

- [1] J. H. Conway, H. Burgiel, C. G. Strauss, *The symmetries of things*, CRC Press Boca Raton, USA, 2008.
- [2] A. I. Ramírez Galarza, J. Seade Kuri, *Introducción a la geometría avanzada*, Las Prensas de Ciencias, UNAM, México, 2002.
- [3] D. Avella, O. Mendoza, E. C. Sáenz, M. J. Souto, *Grupos 1*, Papirhos, UNAM, México, 2017.
- [4] S. H. Friedberg, A. J. Insel, L. E. Spence, *Linear algebra*, Pearson, India, 2013.